



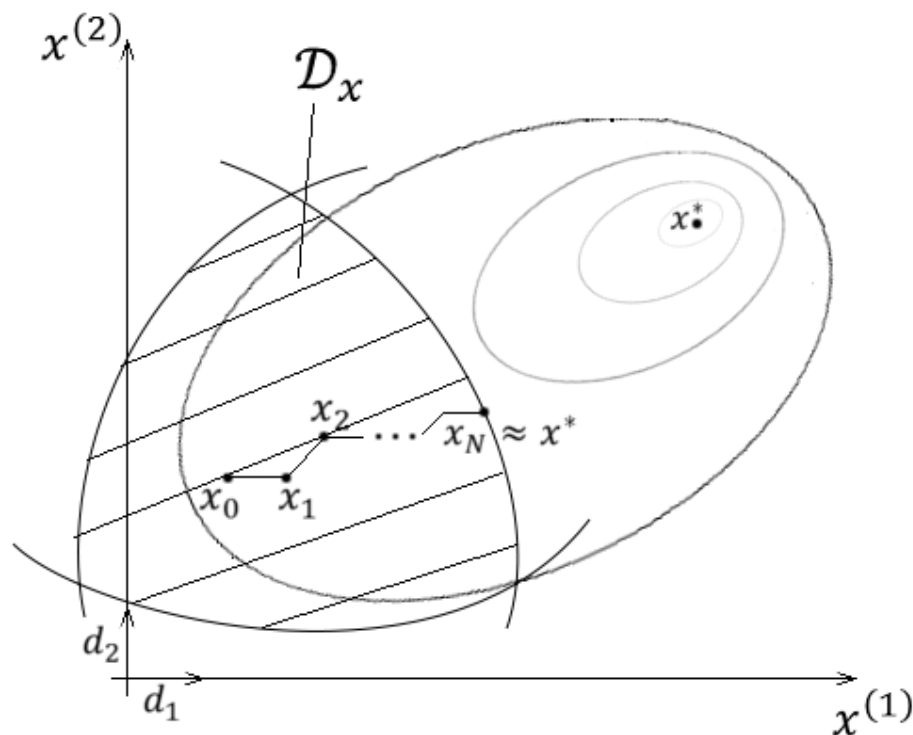
Politechnika Wrocławska

Optymalizacja systemów

Wykład 6. Metody optymalizacji z ograniczeniami

Numeryczne metody optymalizacji z ograniczeniami

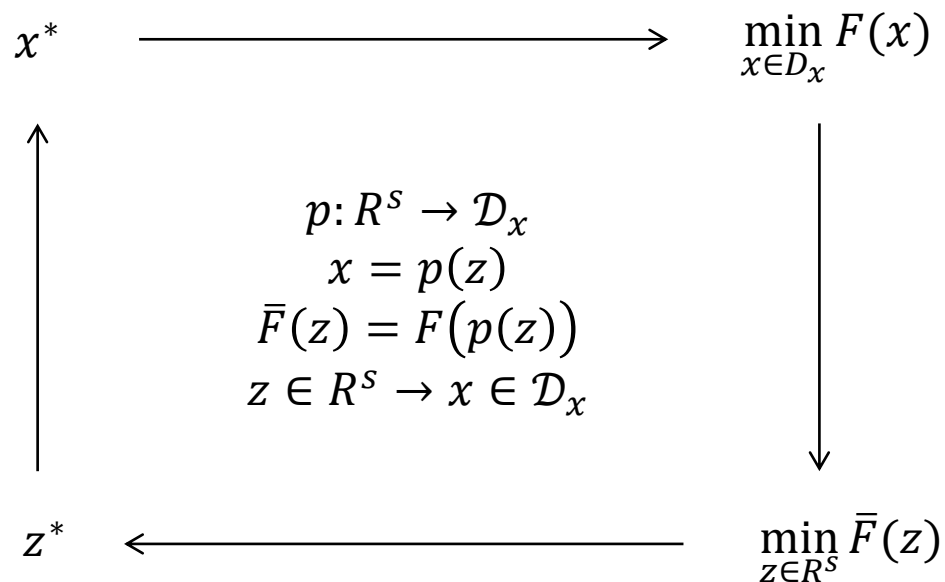
$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$



1. Metoda transformacji zmiennych
2. Metody funkcji kary
 - kara zewnętrzna (kara)
 - kara wewnętrzna (bariera)
3. Metody poprawy kierunków
4. Inne

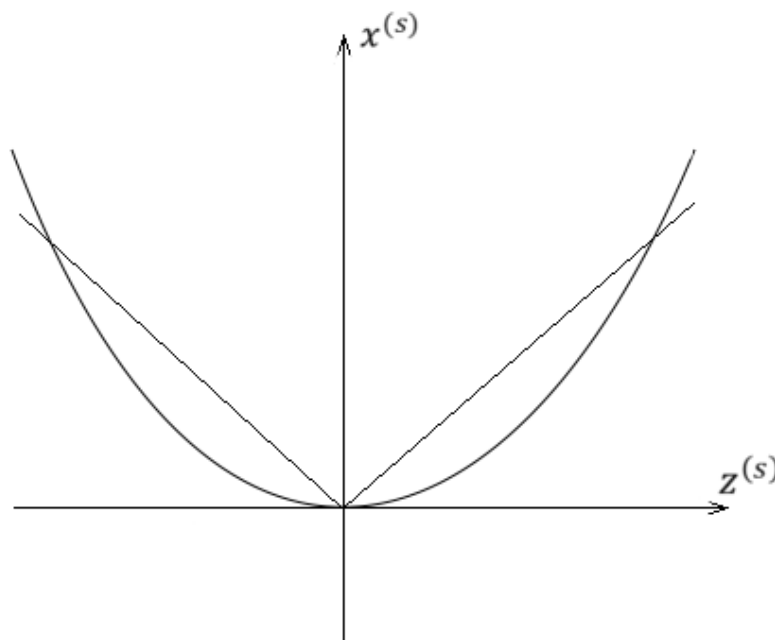


Metoda transformacji zmiennych



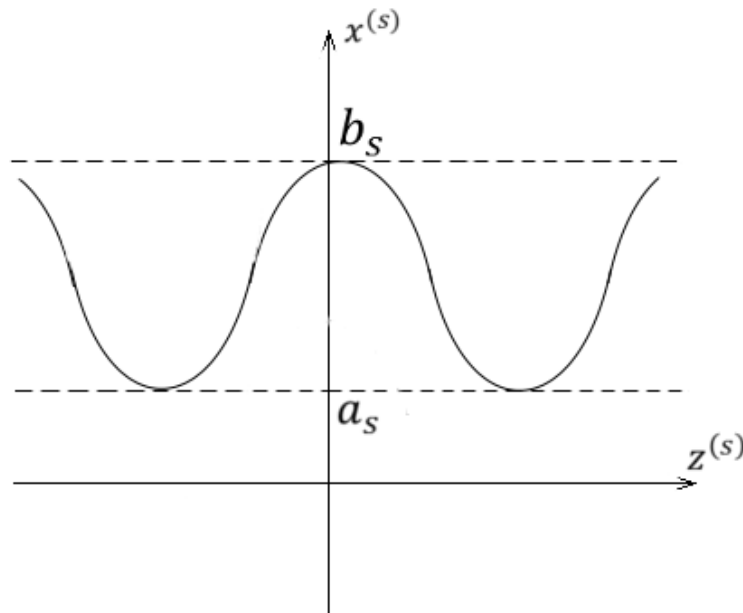
Przykład

$$D_x = \{x \in R^S, \quad x^{(s)} \geq 0, \quad s = 1, 2, \dots, S\}$$
$$x^{(s)} = (z^{(s)})^2 \text{ lub } x^{(s)} = |x^{(s)}|$$
$$z^{(s)} \in R^S \rightarrow x^{(s)} \in [0, \infty)$$



Przykład

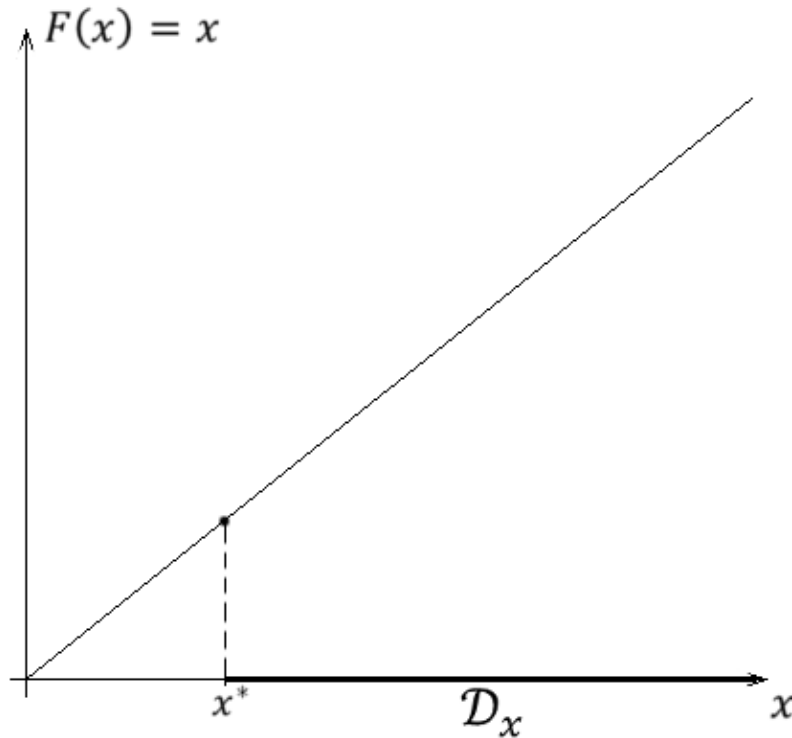
$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^s, \quad a_s \leq x^{(s)} \leq b_s, \quad s = 1, 2, \dots, S\}$$
$$x^{(s)} = a_s + (b_s - a_s) \sin^2 z^{(s)}$$
$$z^{(s)} \in R^1 \rightarrow x^{(2)} \in [a_s, b_s]$$



Przykład

$$F(x) = x$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid x \geq 1\}$$



$$x^* \rightarrow \min_{x \geq 1} x$$

$$x = z^2 + 1 = p(z)$$

$$z \in \mathbb{R} \rightarrow x \in [1, \infty)$$

$$\bar{F}(z) = z^2 + 1$$

$$z^* \rightarrow \min_{z \in \mathbb{R}} \bar{F}(z)$$

$$z^* \rightarrow \min_{z \in \mathbb{R}} (z^2 + 1)$$

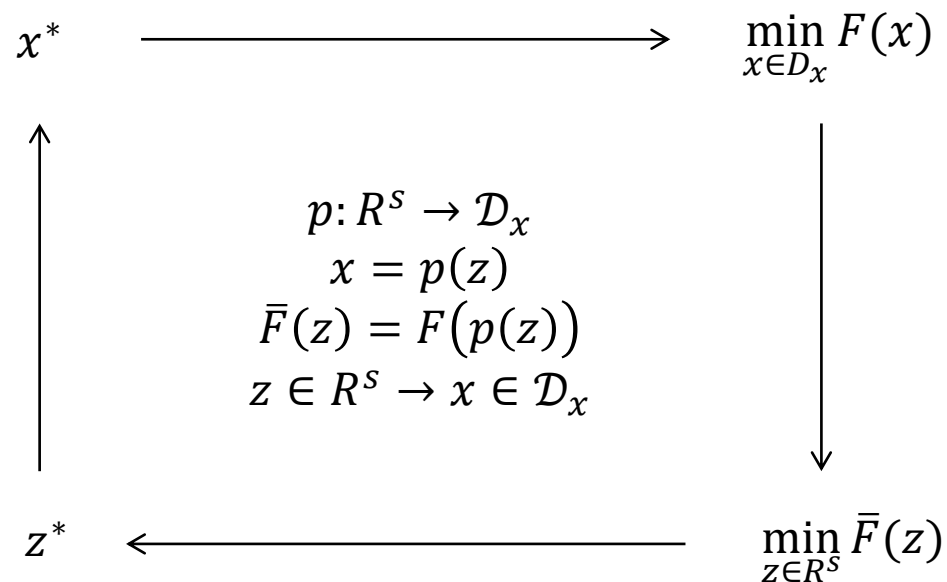
$$(z^2 + 1)' = 2z = 0$$

$$z^* = 0$$

$$x^* = p(z^*) = (z^*)^2 + 1 = 1$$



Metoda transformacji zmiennych

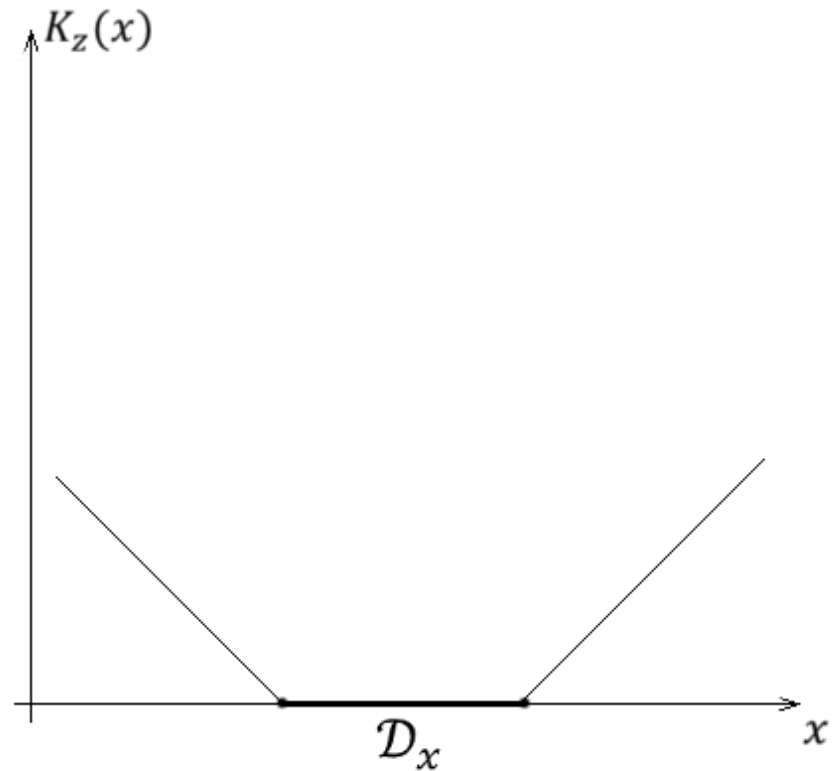


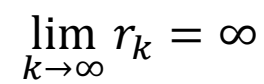
Metody funkcji kary

Kary zewnętrzne (kary)

$$F_k(x) = F(x) + r_k K_z(x)$$

$$K_z(x) = \begin{cases} = 0 & x \in \mathcal{D}_x \\ > 0 & x \notin \mathcal{D}_x \end{cases}$$





Przykłady funkcji kary zewnętrznej

$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^s, \varphi_l(x) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad \psi_m(x) \leq 0, \quad m = 1, 2, \dots, M\}$$

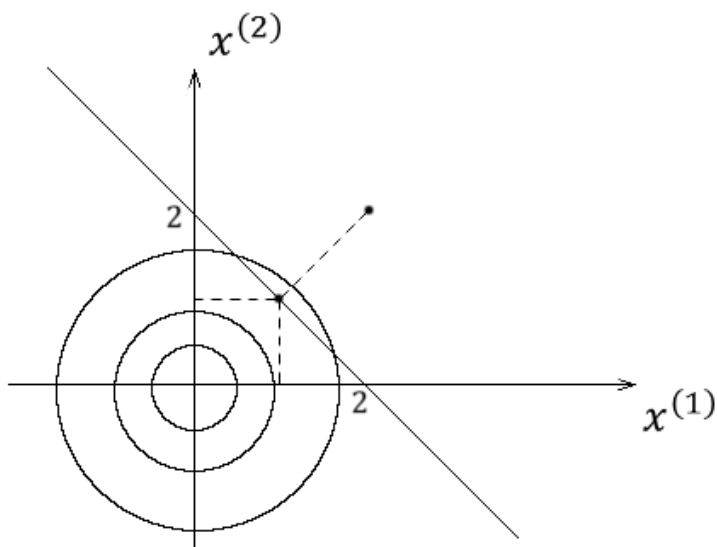
$$\varphi_l(x) \rightarrow K_{lz}(x) = (\varphi_l(x))^2, \quad l = 1, 2, \dots, L$$

$$\psi_m(x) \rightarrow K_{mz}(x) = (\max\{0, \psi_m(x)\})^2, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$K_z(x) = \sum_{l=1}^L r_l (\varphi_l(x))^2 + \sum_{m=1}^M \rho_m \max\{0, \varphi_m(x)\}$$

Przykład

$$F(x) = (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2$$
$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^2, x^{(1)} + x^{(2)} - 2 = 0\}$$



$$F_k(x) = (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2 + r_k(x^{(1)} + x^{(2)} - 2)^2$$

$$F'_k(x) = 0$$

$$2x^{(1)} + 2r_k(x^{(1)} + x^{(2)} - 2) = 0$$

$$2x^{(2)} + 2r_k(x^{(1)} + x^{(2)} - 2) = 0$$

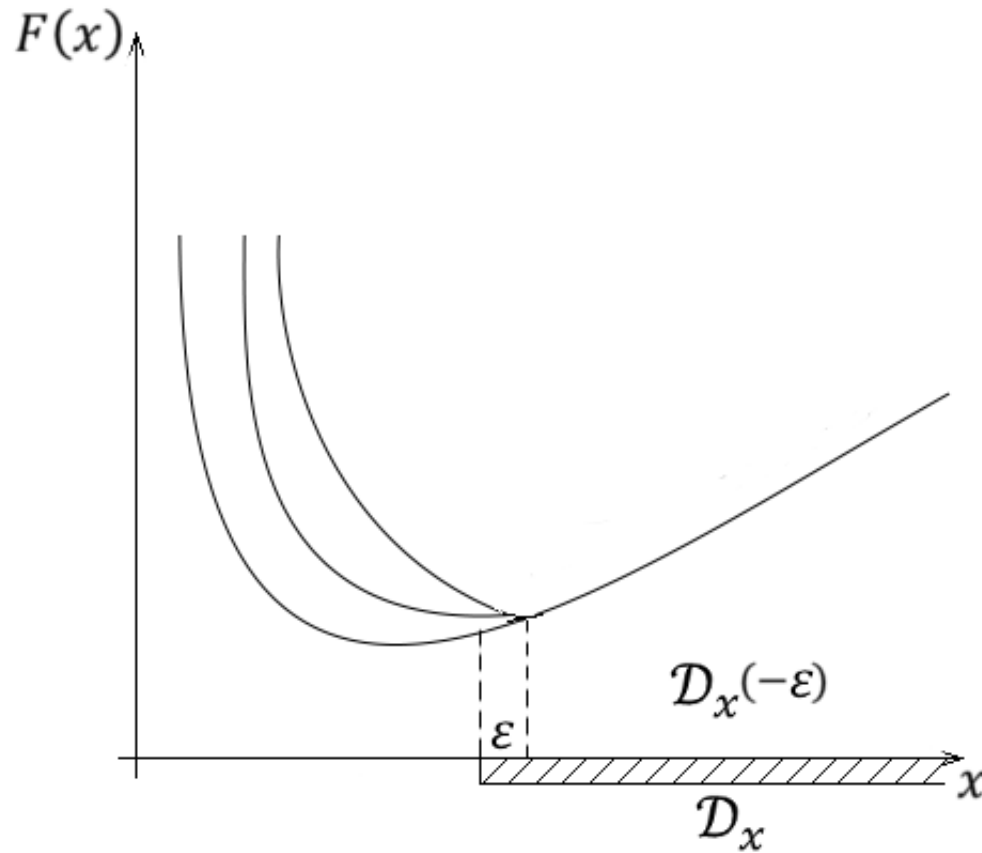
$$x^{(1)} = x^{(2)}$$

$$+2r_k(x^{(1)} + x^{(2)} - 2) = 0$$

$$x^{(1)} = x^{(2)} = \frac{2r_k}{2r_k + 1}$$

$$x^{(1)} = x^{(2)} = \lim_{r_k \rightarrow \infty} \frac{2r_k}{2r_k + 1} = 1, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

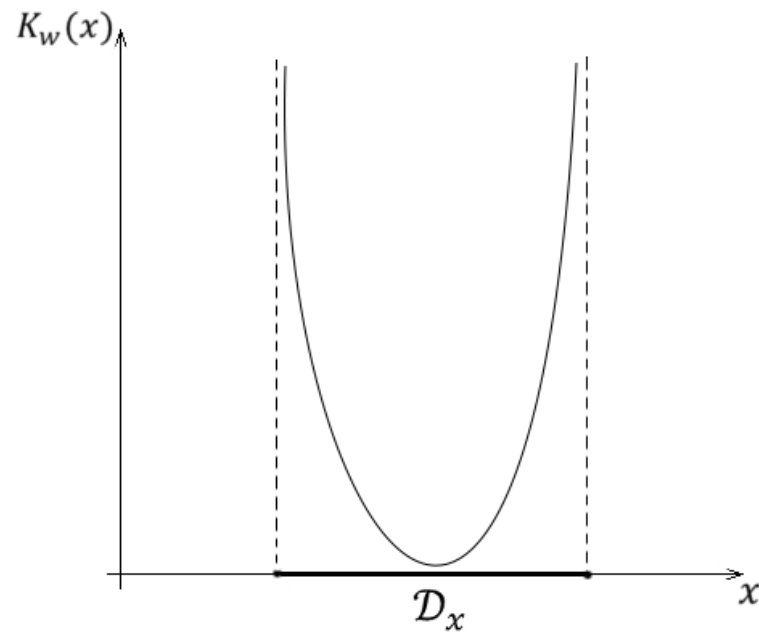
Modyfikacje



Zaczynamy coraz wcześniej

Kary wewnętrzne (bariery)

$$F_k(x) = F(x) + r_k K_w(x)$$

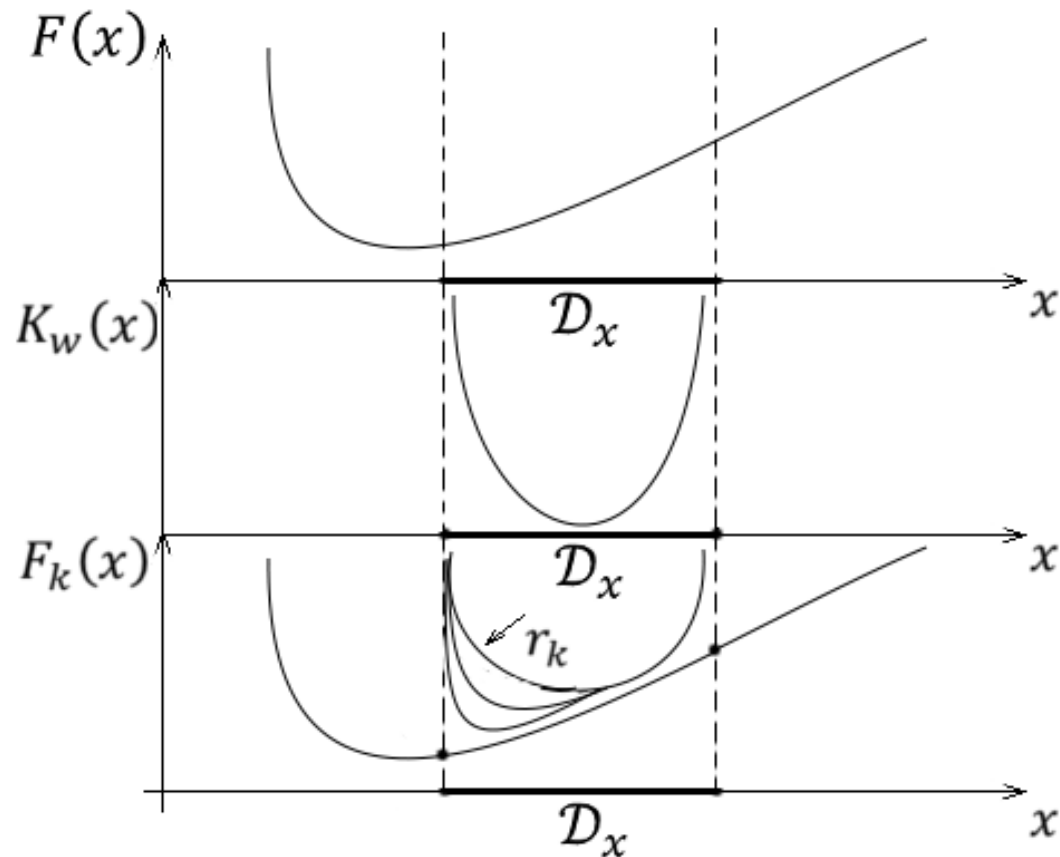


$K_w(x)$ – taka funkcja, że

$$\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{D}_x \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \in \mathcal{D}_x$$

$$\exists_k \quad K_w(x_k + 1) > K_w(x_k)$$

Kary wewnętrzne (bariery)

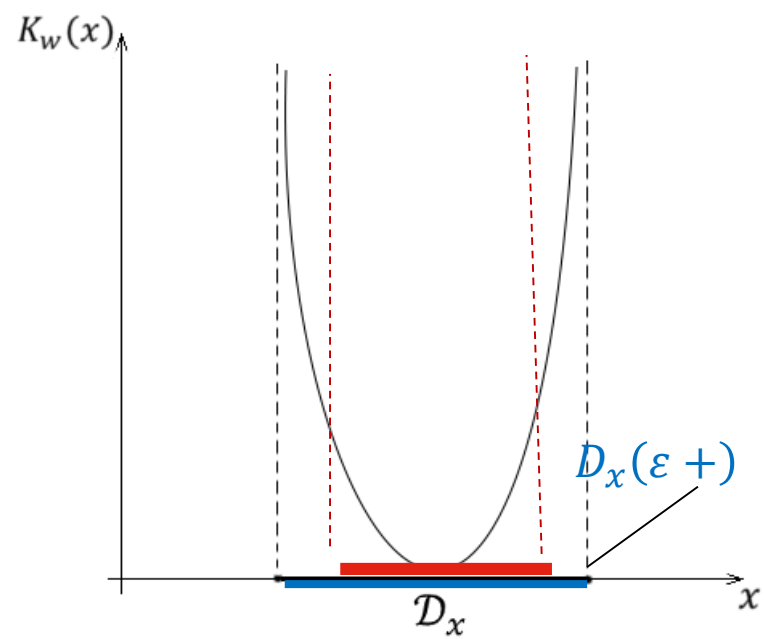


$$r_k > 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$$

Kara wewnętrzna (metoda Carrola)

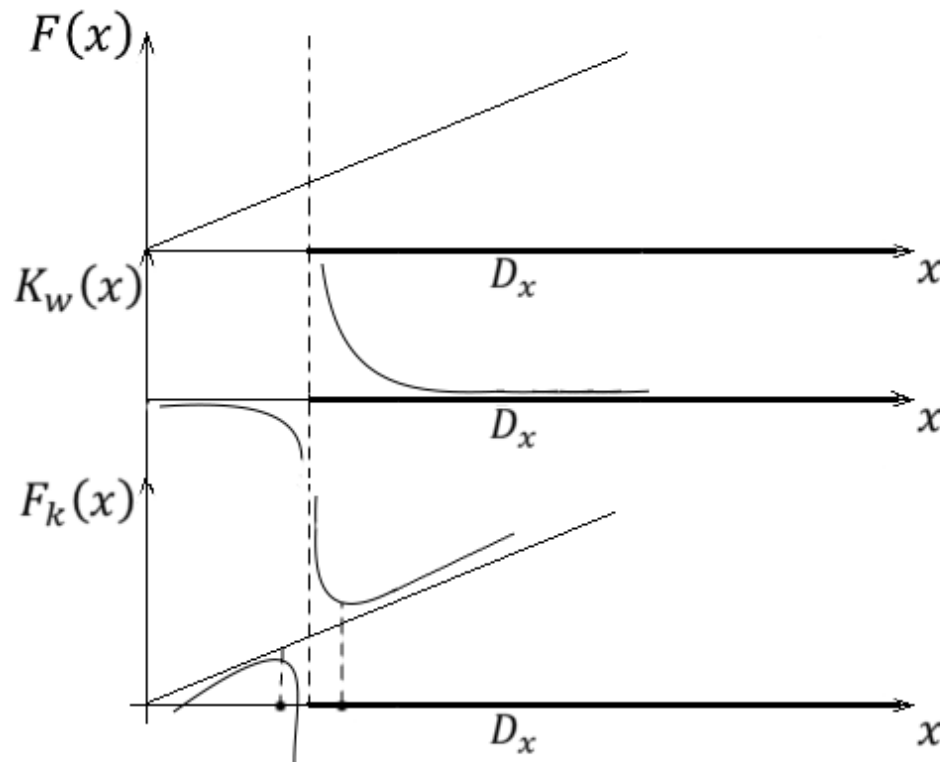
$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^s, \quad \psi_m(x) \leq 0, \quad m = 1, 2, \dots, M\}$$

$$K_w(x) = \sum_{m=1}^M \frac{-r_m}{\psi_m(x)}, \quad m = 1, 2, \dots, M$$



Przykład

$$F(x) = x; \quad \mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^1, x \geq 1\} \equiv \{x \in \mathbb{R}^1, 1 - x \leq 0\}$$



$$K_w(x) = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$$

$$F_k(x) = x + r_k \frac{1}{x-1}$$

$$F'(x) = 1 + \frac{-r_k}{(x-1)^2} = 0$$

$$x_k = 1 \pm \sqrt{r_k}$$

$$x_k = 1 - \sqrt{r_k} \notin \mathcal{D}_x$$

$$x_k = 1 + \sqrt{r_k} \in \mathcal{D}_x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

Metoda Rozebrocka

$$l_m(x) \leq X_m(x) \leq u_m(x) \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$l_m(x) \leq X_m(x) \leq l_m(x) + \alpha$$

$$u_m(x) \leq X_m(x) \leq u_m(x) - \alpha$$

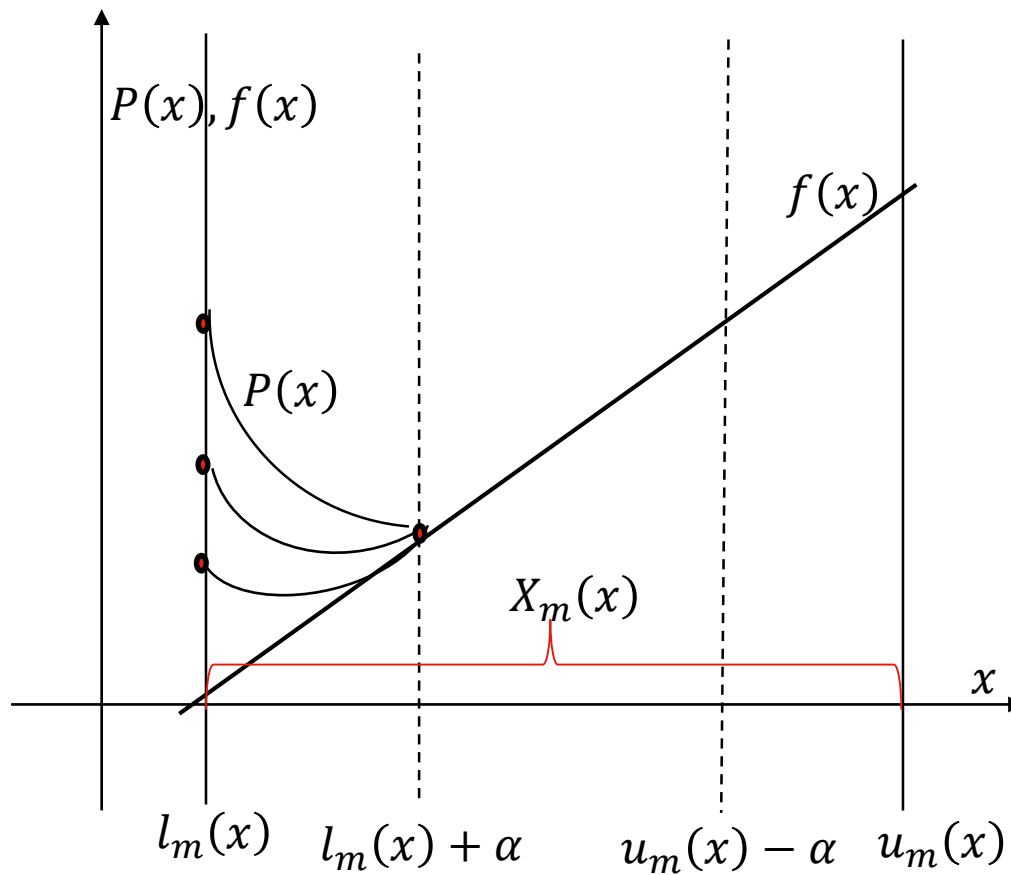
$$P(x) = f(x) - (f(x) - f^*)(3\mu - 4\mu^2 + 2\mu^3)$$

$$\mu = \frac{l_m(x) + \alpha - X_m(x)}{\alpha} \text{ lub } \mu = \frac{X_m(x) - u_m(x) + \alpha}{\alpha}$$

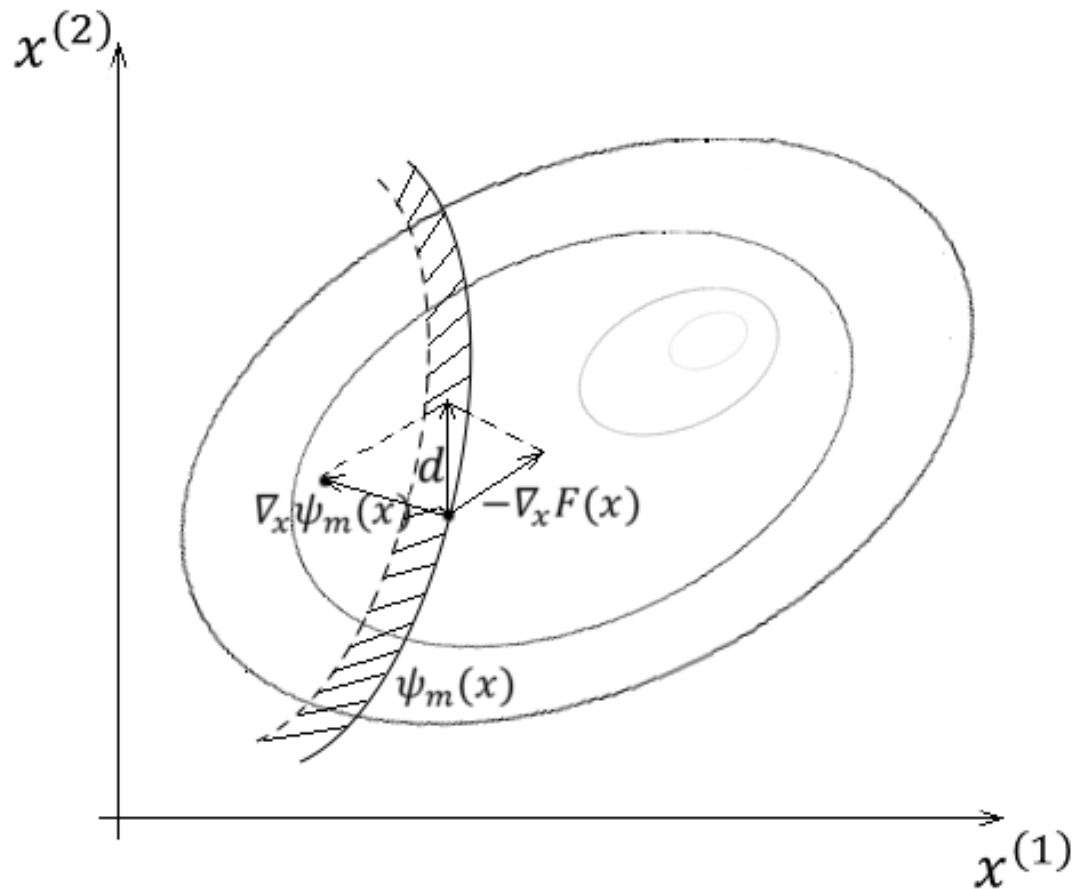
$$l_m(x) + \alpha \leq X_m(x) \leq u_m(x) - \alpha$$

$$P(x) = f(x)$$

Metoda Rozebrocka



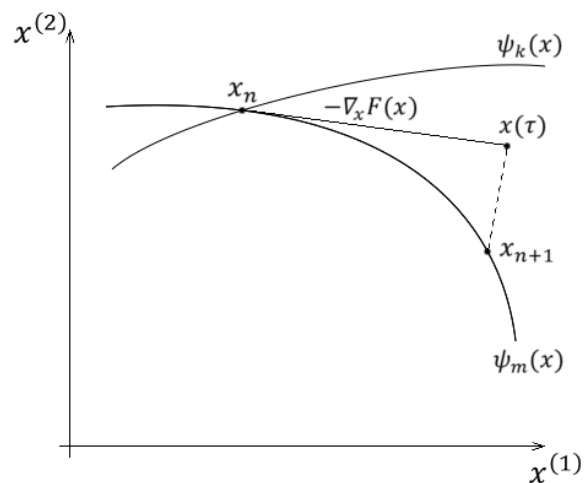
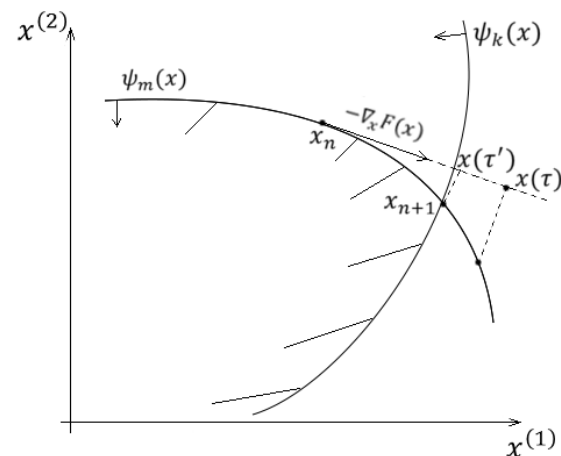
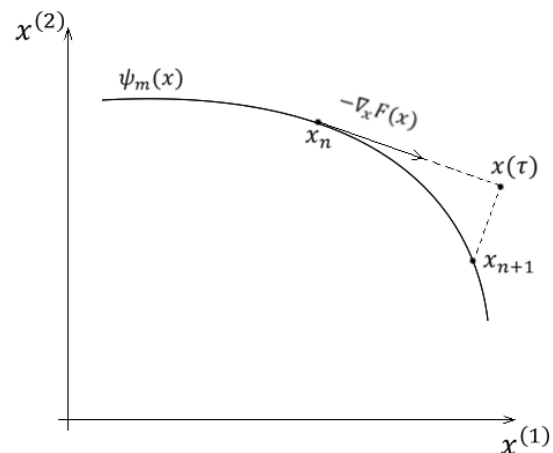
Metoda modyfikacji kierunków



$$d = \frac{\nabla_x \psi_m(x)}{\|\nabla_x \psi_m(x)\|} - \frac{\nabla_x F(x)}{\|\nabla_x F(x)\|}$$
$$x: \psi(x) - \delta \leq 0$$



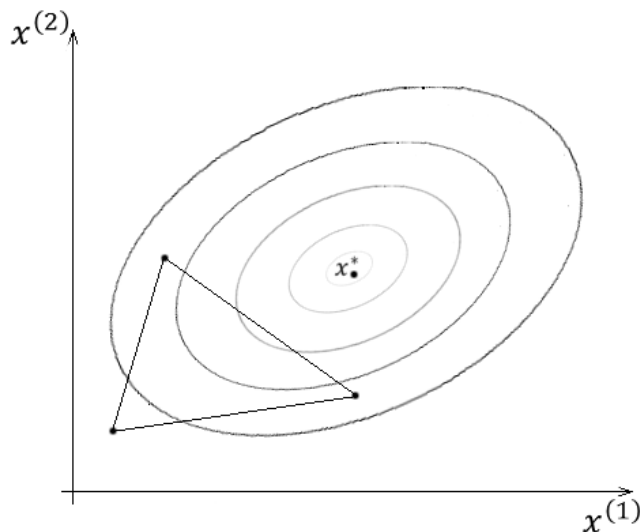
Metoda rzutowania - Rozena



Metoda Kompleks (Boxa)

Metoda Nelder-Meada (simplex)

$x_1 x_2 \dots x_K$ - kompleks w przestrzeni s -wymiarowej $K \geq S + 1$



$$x_H \rightarrow F(x_H) = \max_{1 \leq s \leq K} F(x_s)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \sum_{s=1, s \neq H}^K x_s$$

$$x^* = (1 + \alpha)\bar{x} - \alpha x_H$$

$$D_x: l_s \leq x^{(s)} \leq u_s \quad s = 1, 2, \dots, S$$
$$l_m \leq x_m(x) \leq u_m \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$x_k = l_k + r_k |u_k - l_k|$, r_k - liczba losowa $\in [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots, K$

Jeśli x_k nie należy do D_x to przesun punkt w kierunku centroidu punktów zaakceptowanych



Metoda Complex

DANE: $x_0, c, \varepsilon, K, \alpha$ zalecane $K = 2S, \alpha = 1.3$

Krok 0: $x_1 x_2 \dots x_K \in D_x$ - complex początkowy, $n = 0$

Krok 1: Wyznacz promień minimalnej kuli zawierającej complex ρ_{min}

Krok 2: Sprawdź czy $\rho_{min} < \varepsilon$ jeśli tak to stop, w przeciwnym przypadku krok 3

Krok 3: $x_H \rightarrow F(x_H) = \max_{1 \leq s \leq S+1} F(x_s),$

$\bar{x} = \frac{1}{S} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq H}}^K x_s$ sprawdź czy $\bar{x} \in D_x$ jeśli nie to dodaj punkt do kompleksu

Krok 4: $x^* = (1 + \alpha)\bar{x} - \alpha x_H$

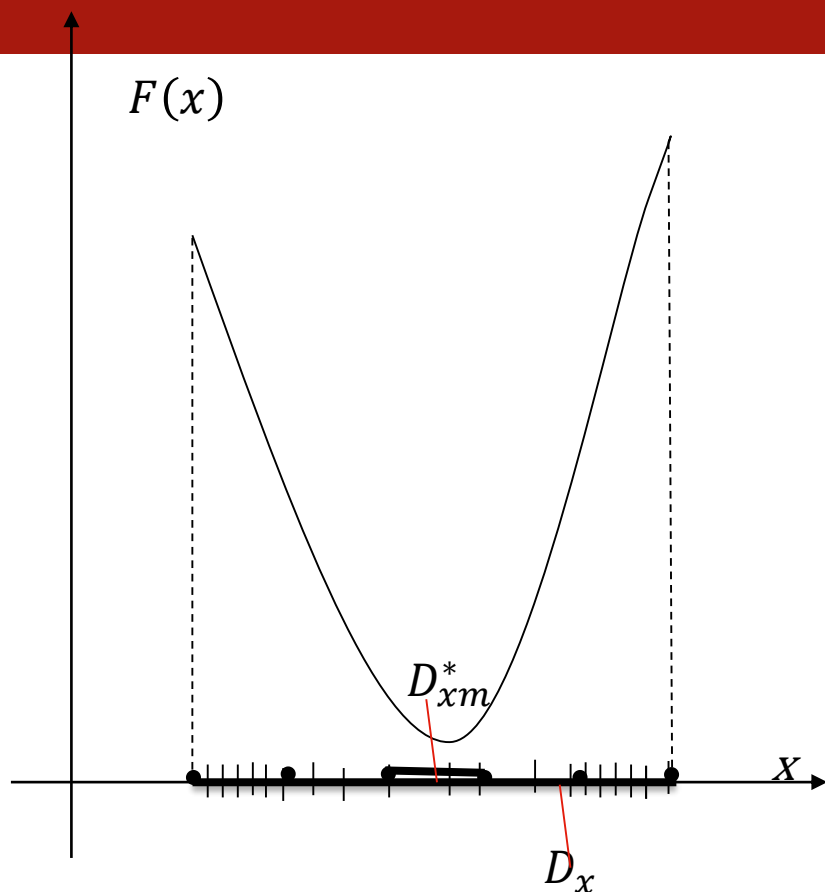
Krok 5: Zbadaj czy $x^* \in D_x$ jeśli tak to przejdź do kroku 7, w przeciwnym razie

Krok 6: $x^* = \bar{x} - (\bar{x} - x^*)/2$ aż $x^* \in D_x$

Krok 7: Jeśli $F(x^*) < F(x_H)$ idź do kroku 2
w przeciwnym razie idź do kroku 6



Poszukiwania losowe



$$f(x) = \frac{F(x)}{\int_{D_x} F(x) dx}$$

$$D_x = \bigcup_{m=1}^M D_{xm}, \quad \|D_{xm}\| = \frac{1}{M} \|D_x\|$$

$D_{xm}^* \rightarrow N_m^* = \min_{1 \leq m \leq M} \{N_m\}$ jeżeli $\|D_{xm}\| < \varepsilon$ stop, $\forall$ punkt $\in D_{xm}^*$ rozw.



Poszukiwania losowe

Dane: $F(x), D_x, \varepsilon, N, M$

Krok 1: Generujemy N punktów w zbiorze D_x wg rozkładu

$$f(x) = \frac{F(x)}{\int_{D_x} F(x) dx}$$

Krok 2: Dzielimy zbiór D_x na M równolicznych rozłącznych podzbiorów

$$D_x = \bigcup_{m=1}^M D_{xm}, \quad \|D_{xm}\| = \frac{1}{M} \|D_x\|$$

Krok 3. Liczymy punkty, które wpadną do poszczególnych zbiorów

N_m – liczba wygenerowanych punktów w zbiorze D_{xm}

Krok 4. Do dalszego podziału wybieramy taki

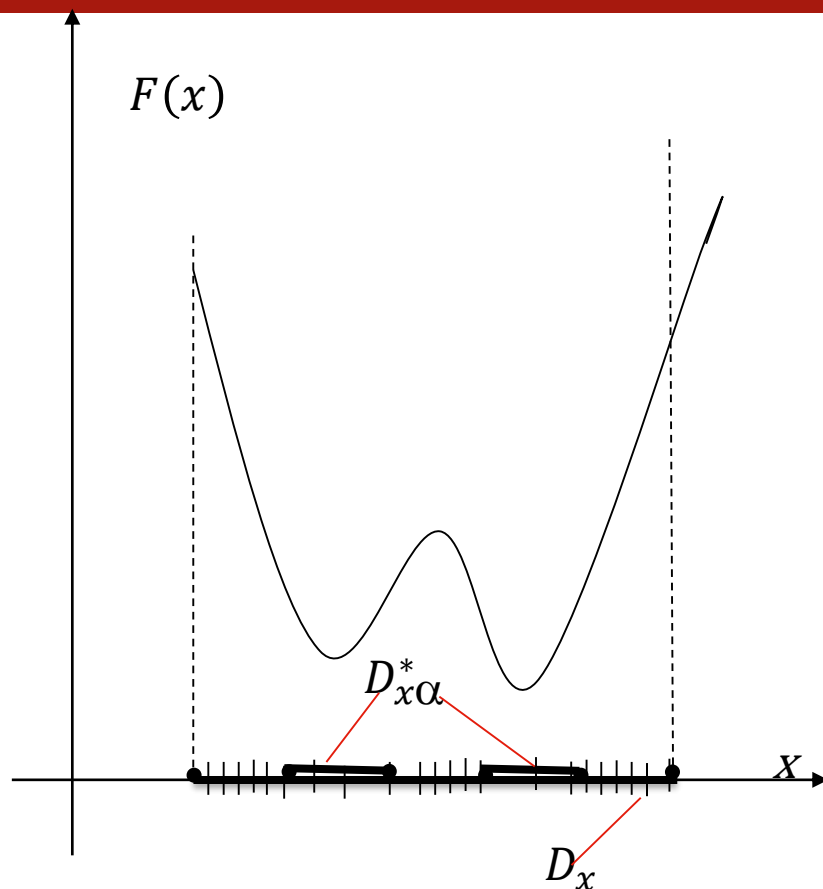
$$D_{xm}^* \rightarrow N_m^* = \min_{1 \leq m \leq M} \{N_m\} \text{ jeżeli } \|D_{xm}\| < \varepsilon \text{ stop, } \forall \text{ punkt } \in D_{xm}^* \text{ rozw.}$$

W przeciwnym przypadku tj. $\|D_{xm}^*\| \geq \varepsilon$ podstaw $D_x := D_{xm}^*$

i idź do kroku 1



Poszukiwania losowe



$$f(x) = \frac{F(x)}{\int_{D_x} F(x) dx}$$

$$D_x = \dot{\bigcup}_{m=1}^M D_{xm}, \quad \|D_{xm}\| = \frac{1}{M} \|D_x\|$$

$$D_{xm\alpha}^* \rightarrow N_{m\alpha}^* \leq \alpha, D_{x\alpha}^* = \bigcup_m D_{xm\alpha}^* \text{ jeżeli } \|D_{x\alpha}^*\| < \varepsilon \text{ stop, } \forall \text{ punkt} \in D_{x\alpha}^* \text{ rozw.}$$



Poszukiwania losowe

Dane: $F(x), D_x, \varepsilon, N, M$

Krok 1: Generujemy N punktów w zbiorze D_x wg rozkładu

$$f(x) = \frac{F(x)}{\int_{D_x} F(x) dx}$$

Krok 2: Dzielimy zbiór D_x na M równolicznych rozłącznych podzbiorów

$$D_x = \bigcup_{m=1}^M D_{xm}, \quad \|D_{xm}\| = \frac{1}{M} \|D_x\|$$

Krok 3. Liczymy punkty, które wpadną do poszczególnych zbiorów

N_m – liczba wygenerowanych punktów w zbiorze D_{xm}

Krok 4. Do dalszego podziału wybieramy taki

$D_{xm\alpha}^* \rightarrow N_{m\alpha}^* \leq \alpha, D_{x\alpha}^* = \bigcup D_{xm\alpha}^*$ jeżeli $\|D_{x\alpha}^*\| < \varepsilon$ stop, $\forall \text{punkt} \in D_{x\alpha}^*$ rozw.

W przeciwnym przypadku^m tj. $\|D_{x\alpha}^*\| \geq \varepsilon$ podstaw $D_x := D_{x\alpha}^*$

i idź do kroku 1



Poszukiwania losowe

Dane: $F(x), x_0, D_x, N$

Krok 0: $n=0, x^* = x_n$

Krok 1: Generujemy punkt x_{n+1} zbiorze D_x wg rozkładu jednostajnego

Krok 2: Jeżeli $F(x_{n+1}) < F(x^*)$ podstaw $x^* = x_{n+1}$

Krok 3: Jeżeli $n < N$ podstaw $n = n + 1$ idź do kroku 1

Krok 4: $x^* = x_N$



Poszukiwania losowe - losowy wybór kierunku

Dane: $F(x), x_0, r, N, \varepsilon$

Krok 0: $n=0, x^* = x_n$

Krok 1: Generujemy N punktów wg rozkładu jednostajnego na w otoczeniu punktu x_n na okręgu o promieniu r .

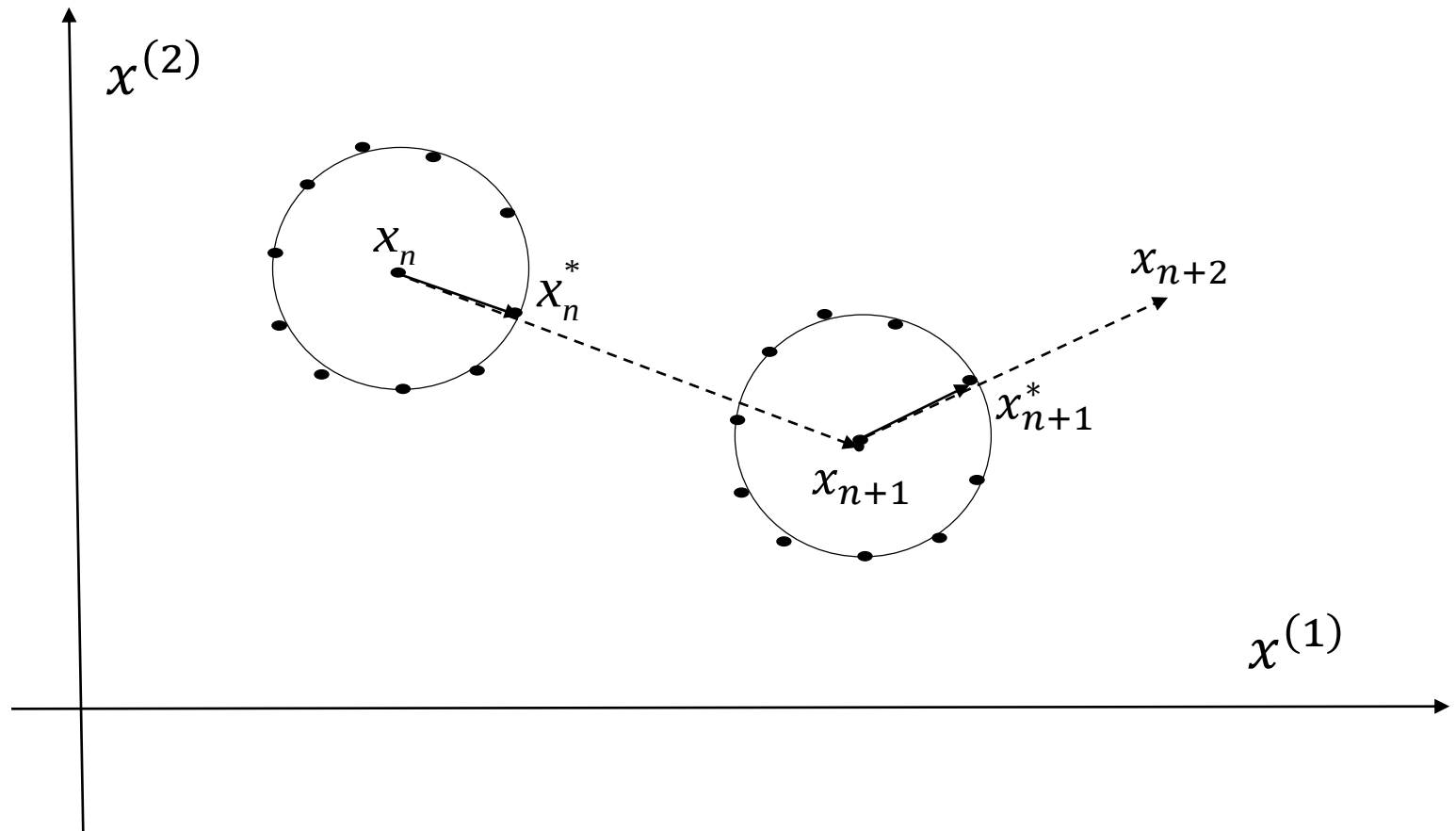
Krok 2: Wybierz spośród wygenerowanych punktów punkt x_n^* dla którego funkcja celu przyjmuje minimum

Krok 3: Wyznacz kierunek $d = \frac{x_n^* - x_n}{\|x_n^* - x_n\|}$

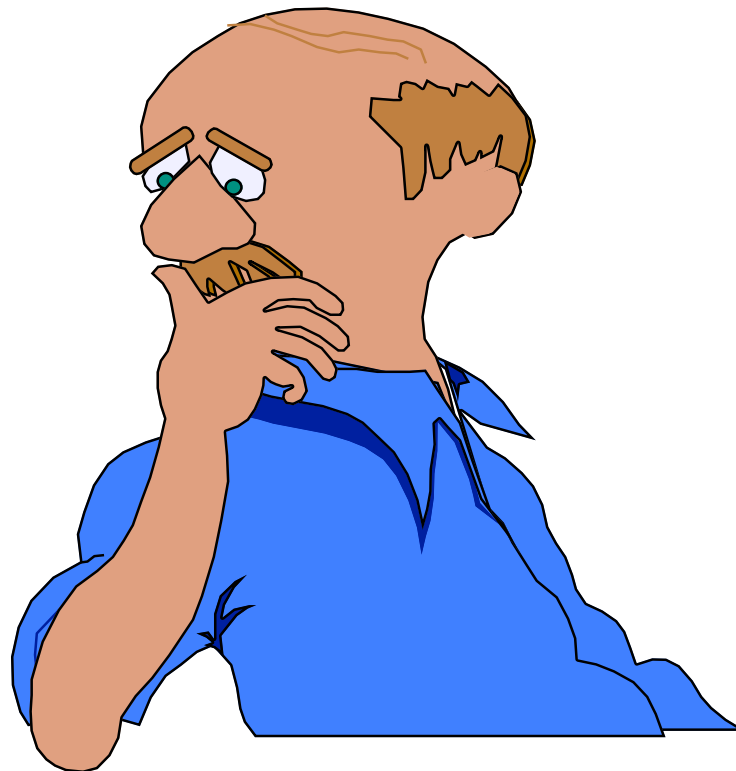
Krok 4: Wyznacz punkt x_{n+1} jako minimum w kierunku d z punktu x_n

Krok 5: Jeżeli minimum to STOP $x_n \approx x^*$ w przeciwnym razie

$n=n+1$ idź do Kroku 1



Dziękuję za uwagę





Algorytmy inspirowanie naturą

- Algorytm Wspinaczkowy - Stochastyczny
- Symulowane Wyżarzanie
- Algorytm Mrówkowy
- Algorytm Pszczeli
- Algorytm Roju Cząstek
- Algorytmy genetyczne