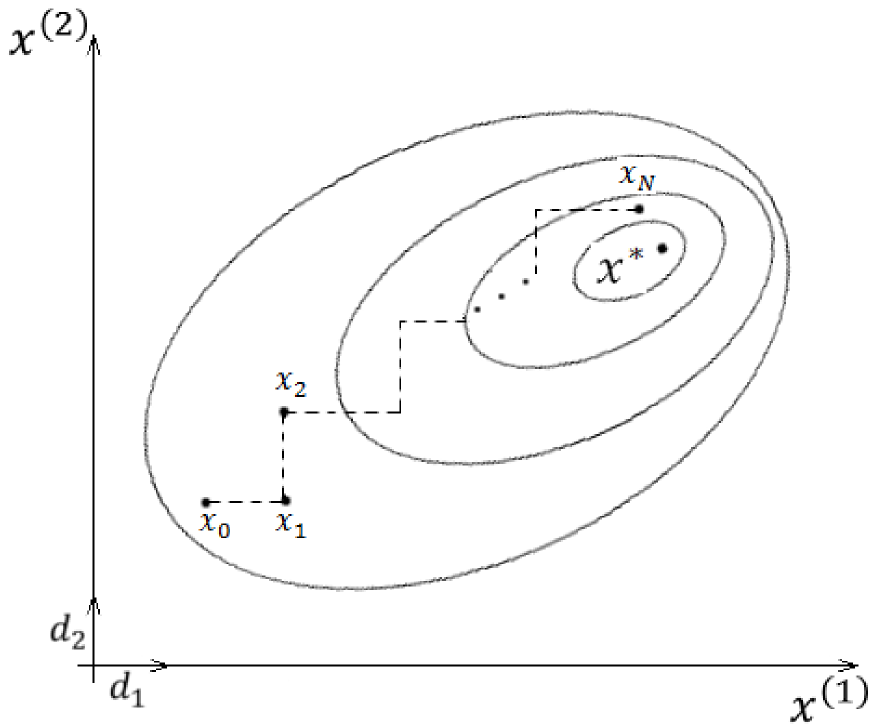
Politechnika Wrocławska

Optymalizacja systemów

Wykład 4. Bezgradientowe metody optymalizacji funkcji wielu zmiennych

Numeryczne metody optymalizacji



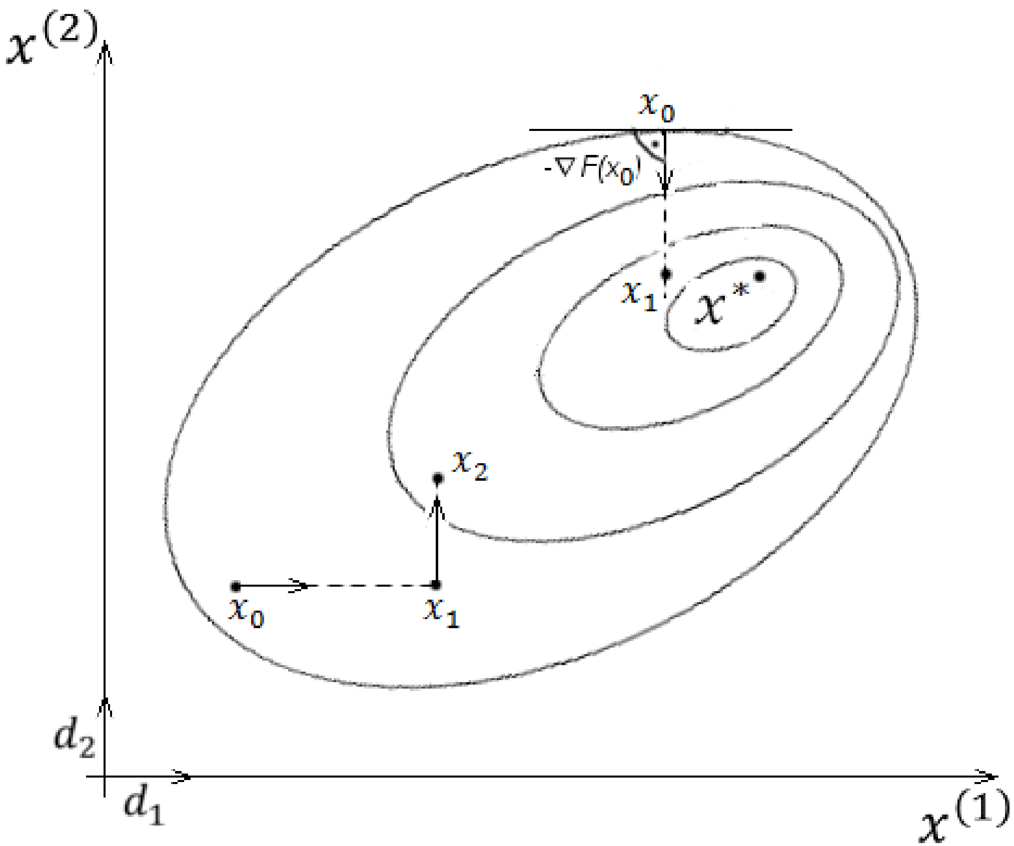
Algorytm
$x_{n+1} = \Psi(x_n), x_0$

- Wybór kierunku poszukiwań.
- Optymalizacja w kierunku.
- Warunki zatrzymania procedury.

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_N \approx x^*$$
$$F(x_0) > F(x_1) > \ \ldots > F(x_n) > \ \ldots > F(x_N) \approx F(x^*)$$

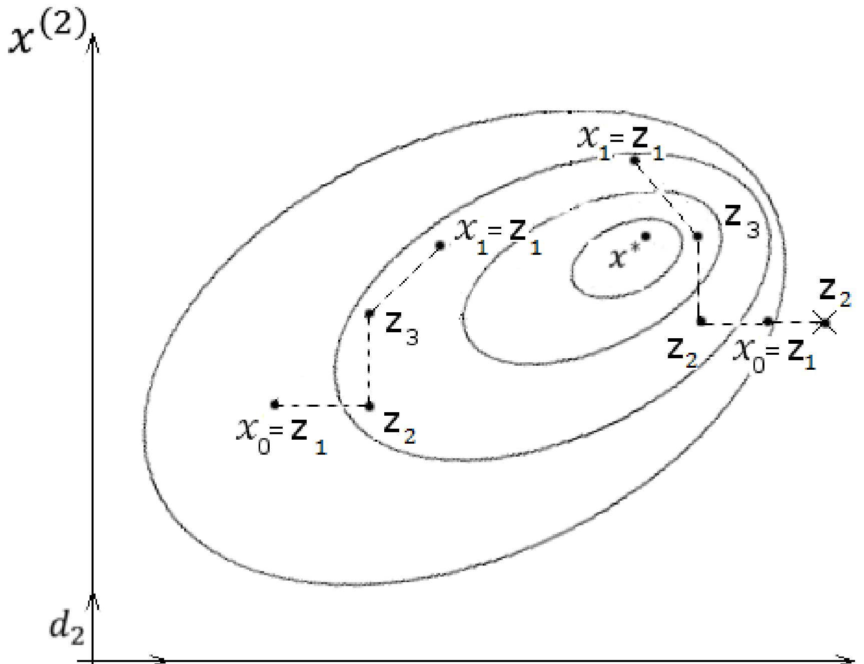
- Bezgradientowe metody optymalizacji
  - Hooka-Jeevesa (z krokiem dyskretnym i optymalnym)
  - Rosenbrocka (z krokiem dyskretnym i optymalnym)
  - Powella
  - Neldera Meada

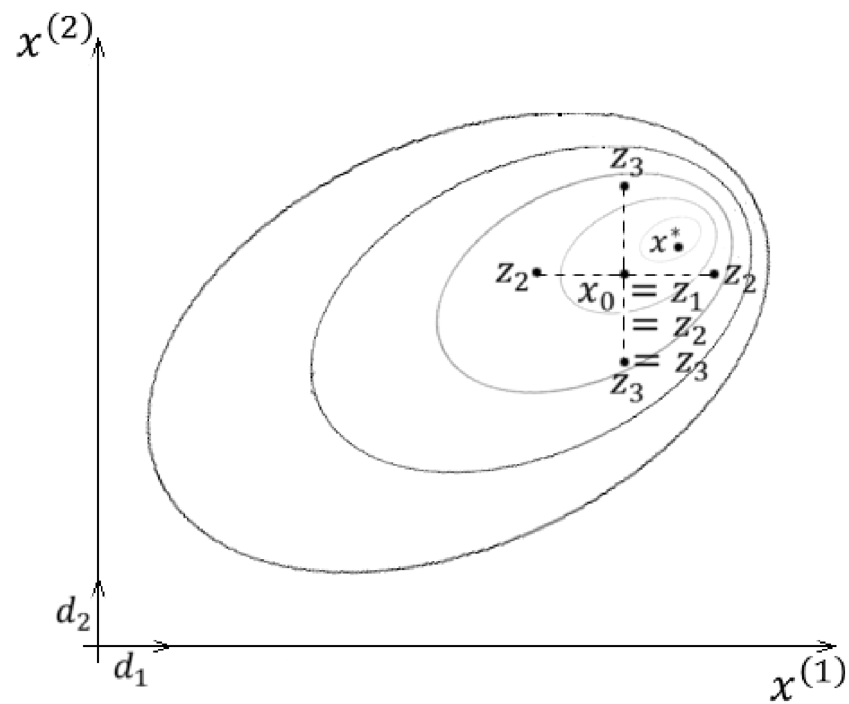
Wybór kierunku poszukiwań



- Kierunki bazowe i ich modyfikacje – metody bezgradientowe.
- Kierunki oparte na gradiencie funkcji – metody gradientowe.

Metoda Hooka-Jeveesa - z krokiem dyskretnym





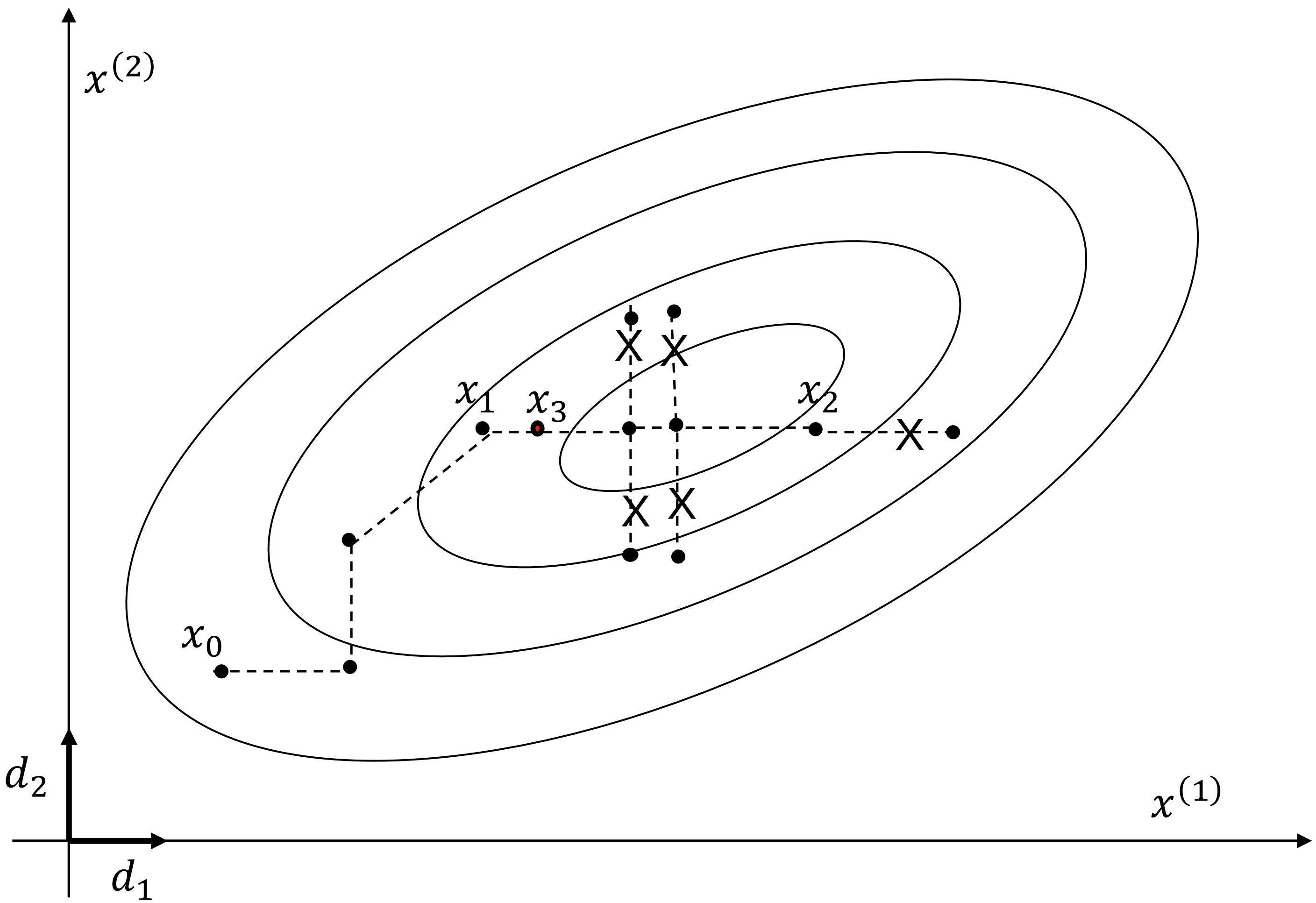
τ- krok

$\alpha > 1$ współczynnik kroku roboczego

$\beta \in (0{,}1)$ współczynnika korekcji kroku

$\tau \coloneqq \tau\beta$

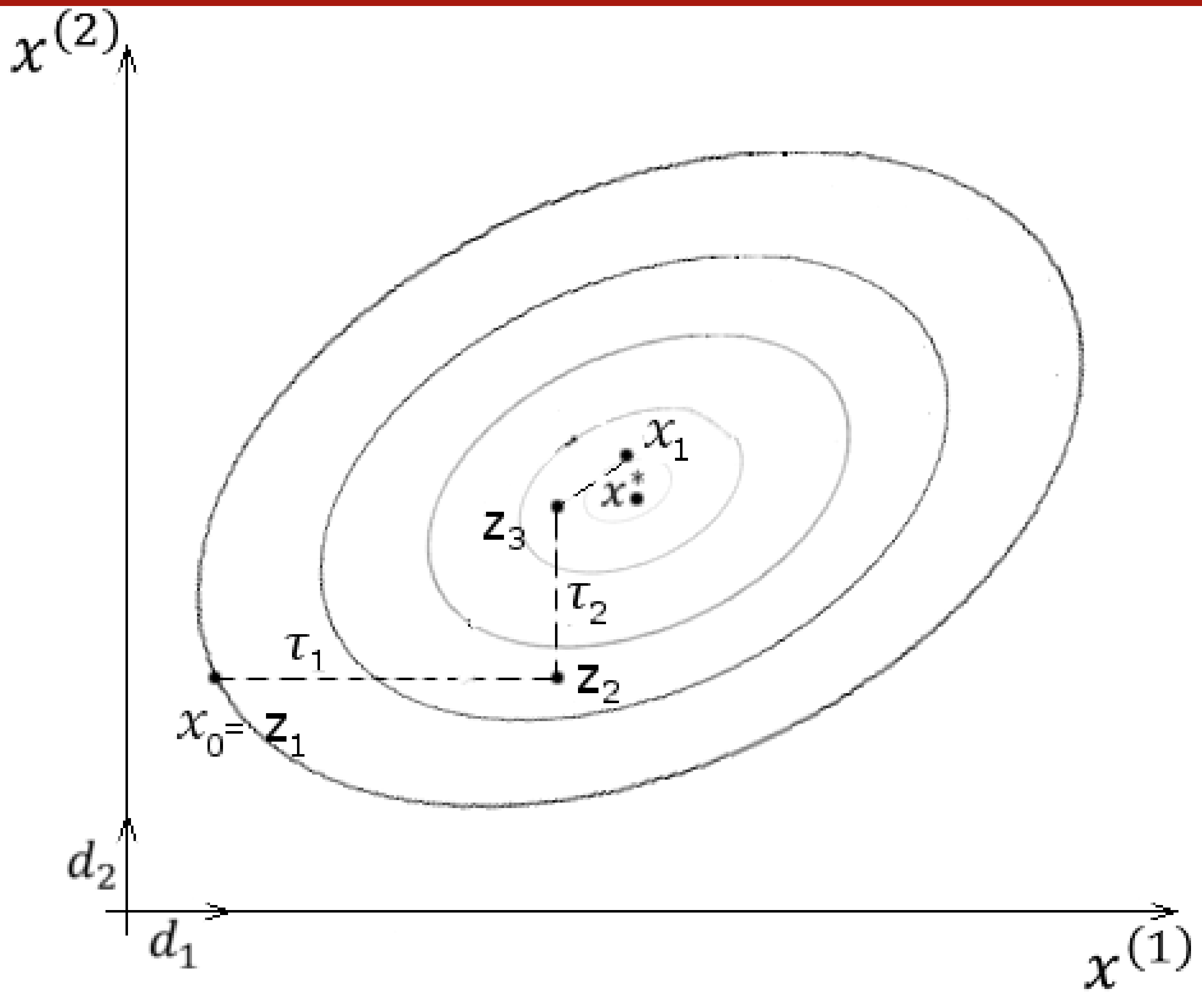
Metoda Hooka-Jeveesa – z krokiem dyskretnym



Metoda Hooka-Jeveesa - z krokiem dyskretnym

DANE: $d_1, d_2, \dots, d_S, x_0, \tau, \varepsilon, \alpha, \beta$
Krok 0: $z_1 \coloneqq x_0, s = 1, n = 0$
Krok 1: $z_{s+1} \coloneqq z_s + \tau d_s$
Jeśli $F(z_{s+1}) < F(z_s)$ idź do kroku 2
w przeciwnym razie $z_{s+1} \coloneqq z_s - \tau d_s$
Jeśli $F(z_{s+1}) < F(z_s)$ idź do kroku 2
w przeciwnym razie $z_{s+1} \coloneqq z_s$
Krok 2: Jeśli $s < S,\ s \coloneqq s + 1$ idź do kroku 1
w przeciwnym razie
Jeśli $F(z_{S+1}) < F(z_1)$ idź do kroku 3
$\tau \coloneqq \tau\beta, x_{n+1} \coloneqq x_n, z_s \coloneqq x_n, n \coloneqq n + 1, s = 1$ idź do kroku 1
Krok 3: Jeśli $\tau < \varepsilon$, STOP
w przeciwnym razie
$x_{n+1} \coloneqq z_{S+1} + \alpha(z_{S+1} - z_1), n \coloneqq n + 1, s \coloneqq 1$ idź do kroku 1

Metoda Hooka-Jeveesa – z krokiem optymalnym



Metoda Hooka-Jeevesa - z krokiem optymalnym

DANE: $d_1, d_2, \dots, d_S, x_0, \varepsilon$

Krok 0: $z_1 \coloneqq x_0, n = 0, s = 1$

Krok 1: $z_{s+1} \coloneqq z_s + \tau_s d_s$

τ_s- min w kierunku d_s

Krok 2: Jeśli $s < S, s = s + 1$ idź do kroku 1

Jeśli $\|z_{S+1} - z_1\| < \varepsilon$ - STOP

Krok 3: $x_{n+1} \coloneqq z_s + \tau d$

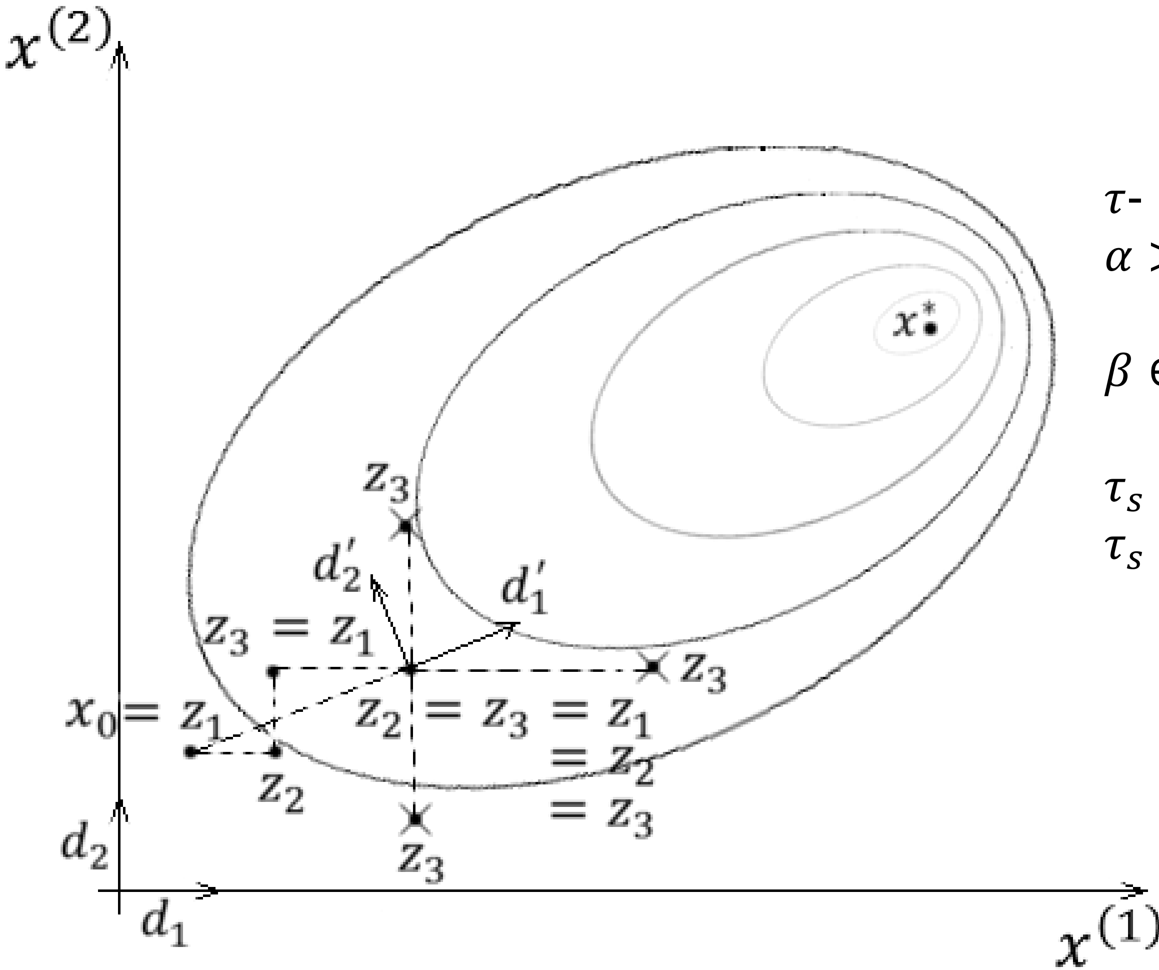
$\tau \rightarrow$ min w kierunku d

$$d = \frac{z_{S+1} - z_1}{\|z_{S+1} - z_1\|} = \frac{\sum_{s=1}^{S+1} \tau_s d_s}{\left\|\sum_{s=1}^{S+1} \tau_s d_s\right\|}$$

$n \coloneqq n + 1, s = 1, z_1 = x_n$

Politechnika Wrocławska

Metoda Rozenbrocka - z krokiem dyskretnym



τ- krok

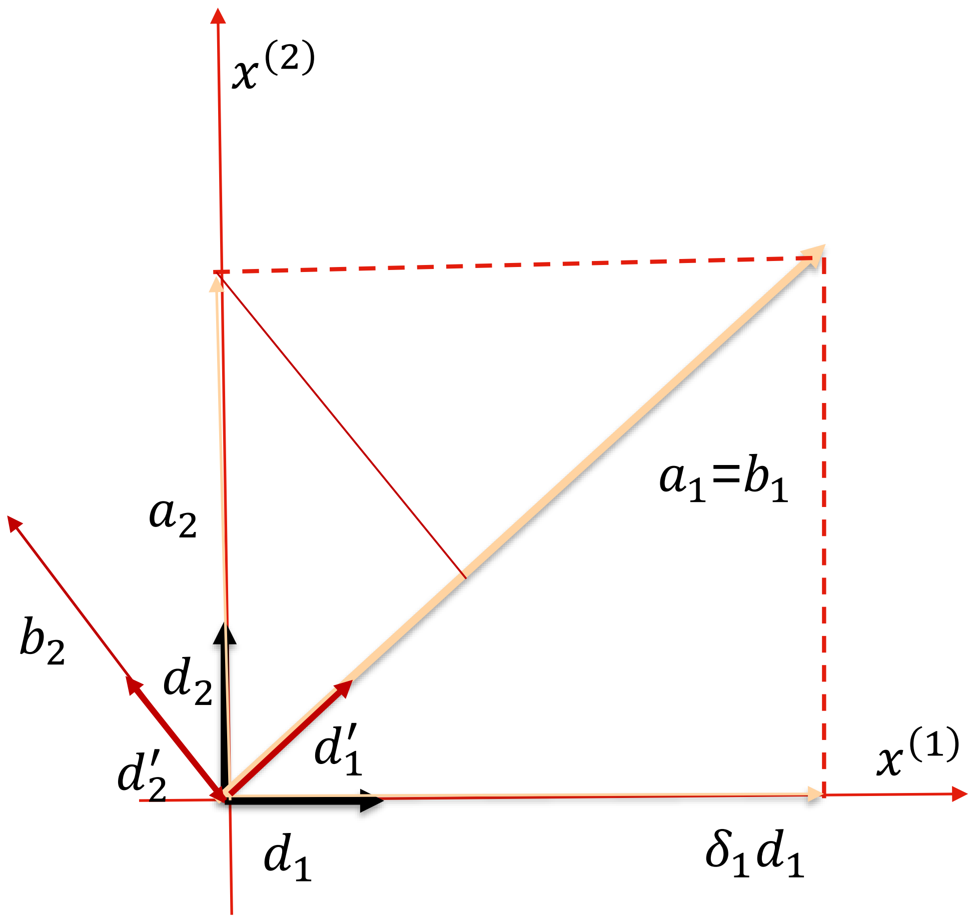
$\alpha > 1$ – współczynnik korekcji kroku

$\beta \in (-1, 0)$ - współczynnika korekcji kroku

$\tau_s \coloneqq \tau_s \alpha$

$\tau_s \coloneqq \tau_s \beta$

Obrót bazy – ortogonalizacja Grama - Schmidta



$$a_1 = \delta_1\, d_1 + \delta_2 d_2$$
$$a_2 = \delta_2\, d_2$$

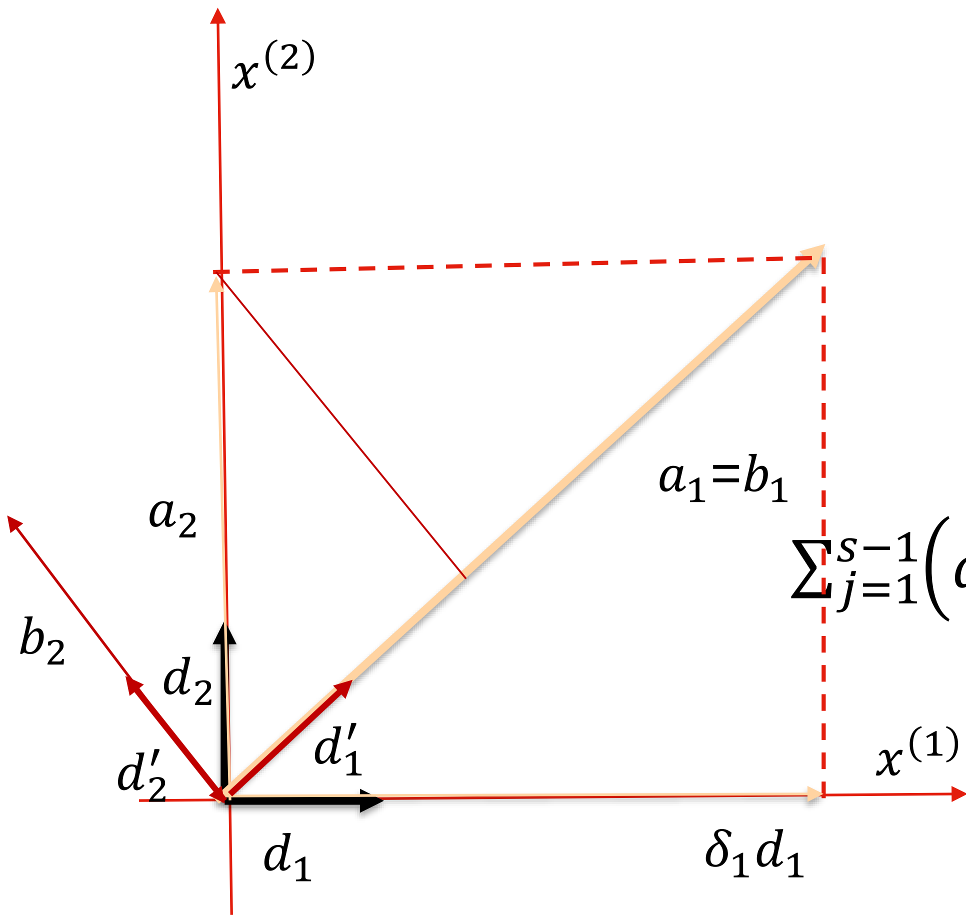
$$b_1 = a_1$$

$$d'_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$$

$$b_2 = a_2 - \left(a_1^T d'_1\right) d'_1$$

$$d'_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|}$$

Obrót bazy - ortogonalizacja Grama - Schmitda



$$a_s = \begin{cases} d_s & \delta_s = 0 \\ \sum_{j=s}^{S} \delta_j d_j & \delta_s \neq 0 \end{cases}$$

$$b_s = \begin{cases} a_s & s = 1 \\ a_s - \sum_{j=1}^{s-1} \left(a_j^T d'_j \right) d'_j \end{cases}$$

$$d'_s = \frac{b_s}{\|b_s\|} \qquad s = 1,2,\ldots,S$$

Metoda Rozenbrocka - z krokiem dyskretnym

DANE: $d_1, d_2, \dots, d_S, x_0, \tau, \varepsilon, \alpha > 1, \beta \in (-1,0)$

Krok 0: $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_S = \tau,\ \ \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_S = 0,\ \ \ z_1 = x_0,\ \ \ n = 0,\ \ \ s = 1$

Krok 1: $z_{s+1} = z_s + \tau_s d_s,$

IF $F(z_{s+1}) < F(z_s)$ $\quad \tau_s \coloneqq \alpha\tau_s, \delta_s = \delta_s + \tau_s$ IDŹ DO KROKU 2

ELSE $F(z_{s+1}) \geq F(z_s)$ $\quad \tau_s \coloneqq \beta\tau_s$ IDŹ DO KROKU 2

Krok 2: IF $s < S$ $\quad s \coloneqq s + 1$ IDŹ DO KROKU 1

IF $F(z_{S+1}) < F(z_1)$ $\quad z_1 \coloneqq z_{S+1}$ $\quad s \coloneqq 1$ IDŹ DO KROKU 1

IF $F(z_{S+1}) = F(x_n)$

IF $n = 0$ zmień punkt startowy

ELSE $x_{n+1} = z_{S+1}$

Krok 3: IF STOP? (np.: $\left\| x_{n+1} - x_n \right\| < \varepsilon$) STOP

Krok 4: Obrót bazy

ELSE $n := n+1,\ s=1$

$\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_S = \tau,\ \ \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_S = 0,$ IDŹ DO KROKU 1

Obrót bazy

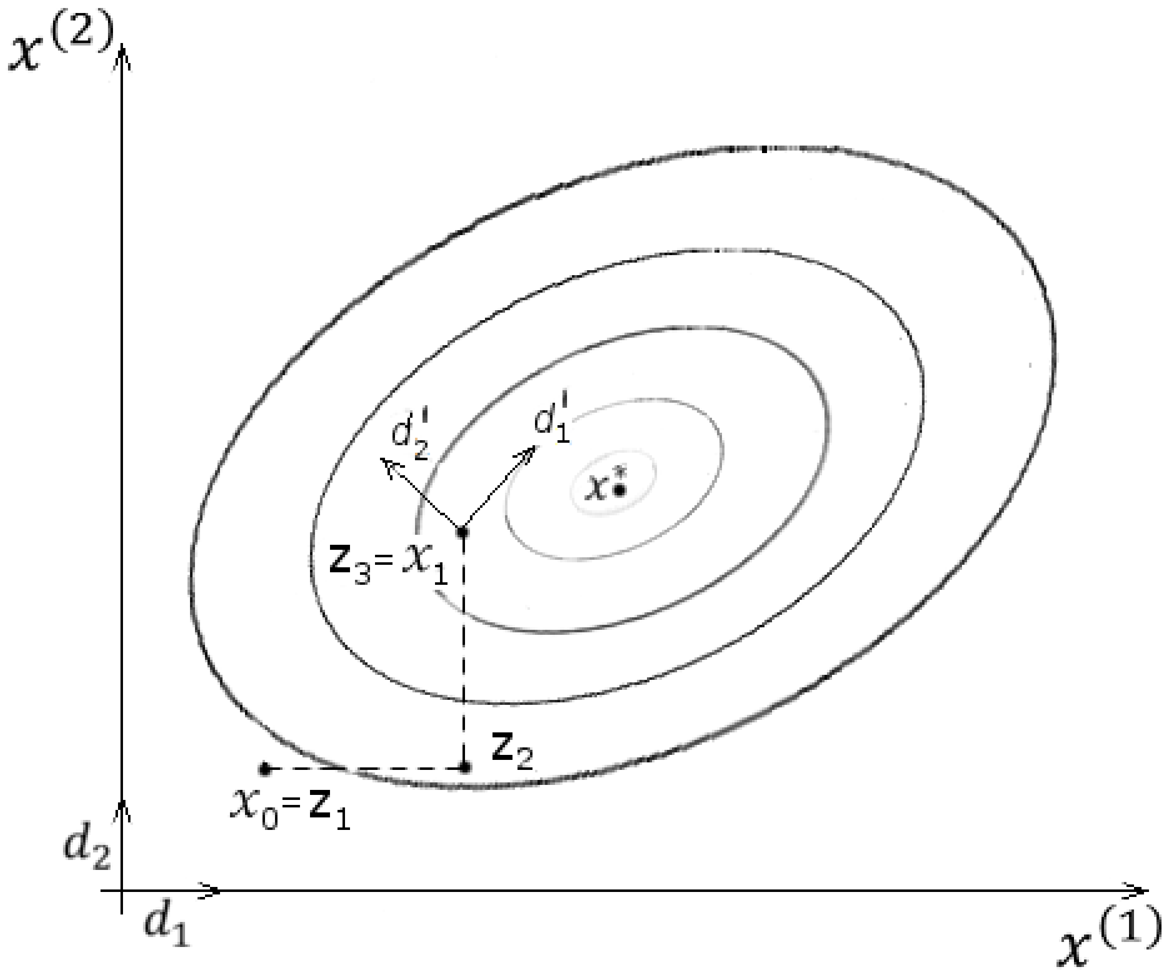
Krok 4:

$$a_s = \begin{cases} d_s & \delta_s = 0 \\ \sum_{j=s}^{S} \delta_j d_j & \delta_s \neq 0 \end{cases}$$

$$b_s = \begin{cases} a_s & s = 1 \\ a_s - \sum_{j=1}^{s-1} \left(a_j^T d_j' \right) d_j' \end{cases}$$

$$d_s' = \frac{b_s}{||b_s||} \qquad s = 1,2,\dots,S$$

Metoda Rozenbrocka - z krokiem optymalnym



Metoda Rozenbrocka - z krokiem optymalnym

DANE: $d_1, d_2, \dots, d_S, x_0, \varepsilon$

Krok 0: $z_1 \coloneqq x_0, n = 0, s = 1$

Krok 1: $z_{s+1} \coloneqq z_s + \tau_s d_s$

τ_s - min w kierunku d_s

Krok 2: Jeśli $s < S, s \coloneqq s + 1$ idź do kroku 1

Jeśli $\|z_{S+1} - z_1\| < \varepsilon$ - STOP

Krok 3:

$$a_s = \begin{cases} d_s & \tau_s = 0 \\ \sum_{j=s}^{S} \tau_j d_j & \tau_s \neq 0 \end{cases}$$

$$b_s = \begin{cases} a_s & s = 1 \\ a_s - \sum_{j=1}^{s-1} \left(a_j^T d_j' \right) d_j' \end{cases}$$

$$d_s' = \frac{b_s}{\|b_s\|} \qquad s = 1,2, \dots, S$$

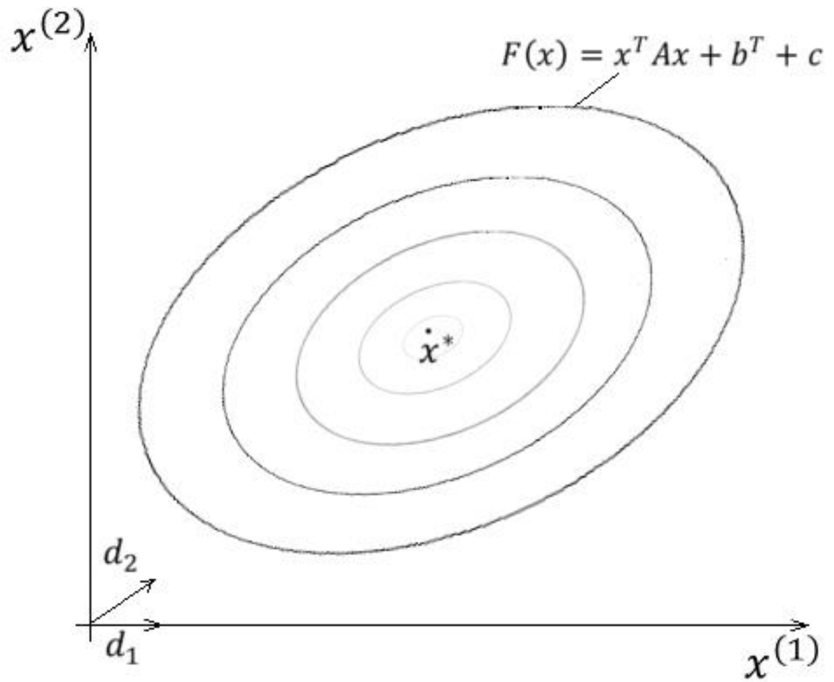
Krok 4: $d_s \coloneqq d_s' \qquad s = 1,2, \dots, S, n \coloneqq n + 1, s = 1$ idź do kroku 1

Politechnika Wrocławska

Metoda Powella - wektory sprzężone

$d_1, d_2, \ldots, d_S$ - sprzężone według macierzy A, symetrycznej i dodatnio określonej

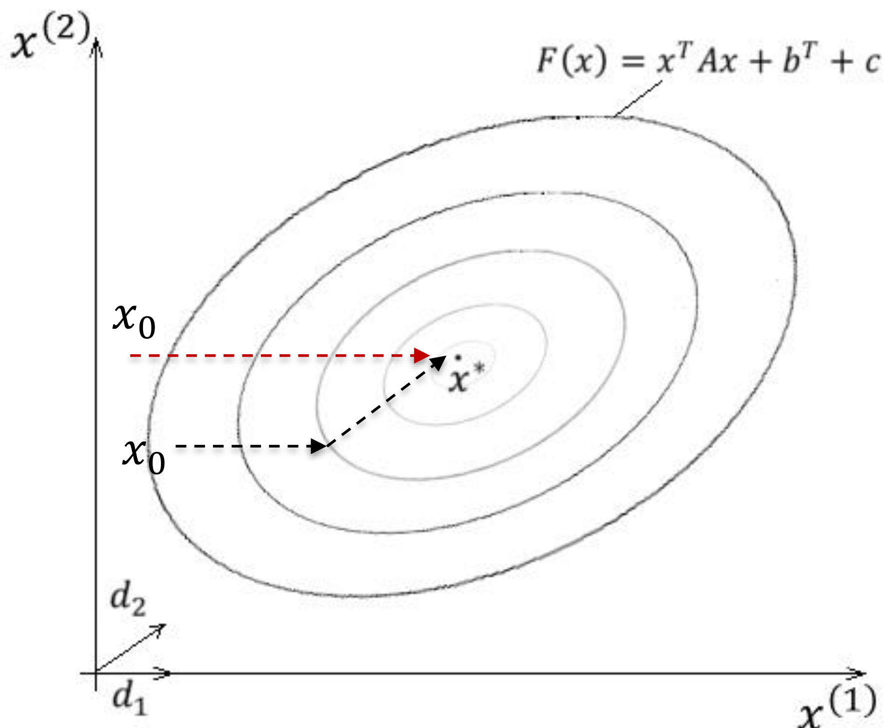
$$d_i^T A d_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$



Metoda Powella – wektory sprzężone

$F(x) = x^T A x + b^T x + c$

Dla tak dobranej funkcji, jeżeli zestaw wektorów $d_1, d_2, \dots, d_S$ jest sprzężony według macierzy A, to minimalizując wzdłuż kierunków sprzężonych otrzymamy rozwiązanie w nie więcej niż S krokach.



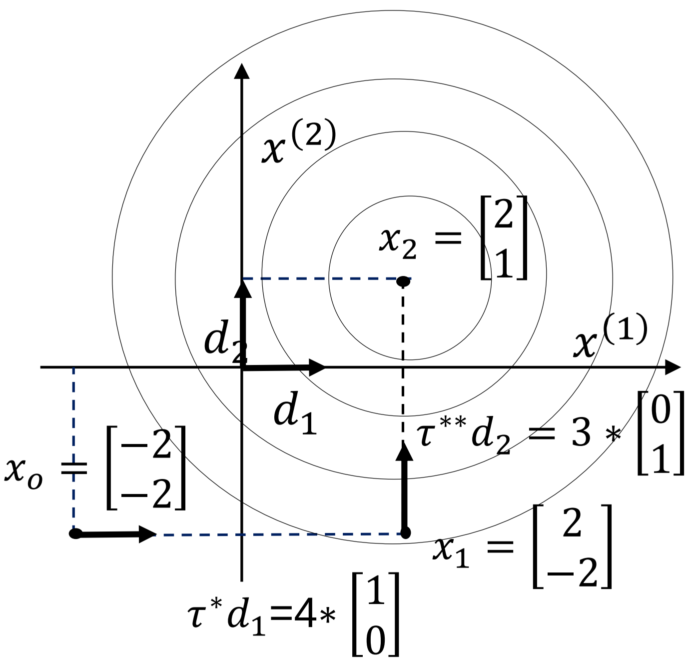
Przykład

$$F(x) = \left(x^{(1)} - 2\right)^2 + \left(x^{(2)} - 1\right)^2,\ x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix},\ d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ d_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\quad H(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$d_1^T H d_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,\ d_1^T H d_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1,\ d_2^T H d_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$x_1 = x_0 + \tau d_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 1 * \tau \\ -2 + 0 * \tau \end{bmatrix}$$

$$F(x_0 + \tau d) = (-2 + \tau - 2)^2 + (-2 - 1)^2 = (\tau - 4)^2 + (3)^2 = \tau^2 - 4\tau + 25 \triangleq f_1(\tau)$$



$$f_1'(\tau) = 2\tau^* - 8 = 0 \qquad \tau^* = 4$$

$$x_1 = x_0 + \tau^* d_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} + 4 * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

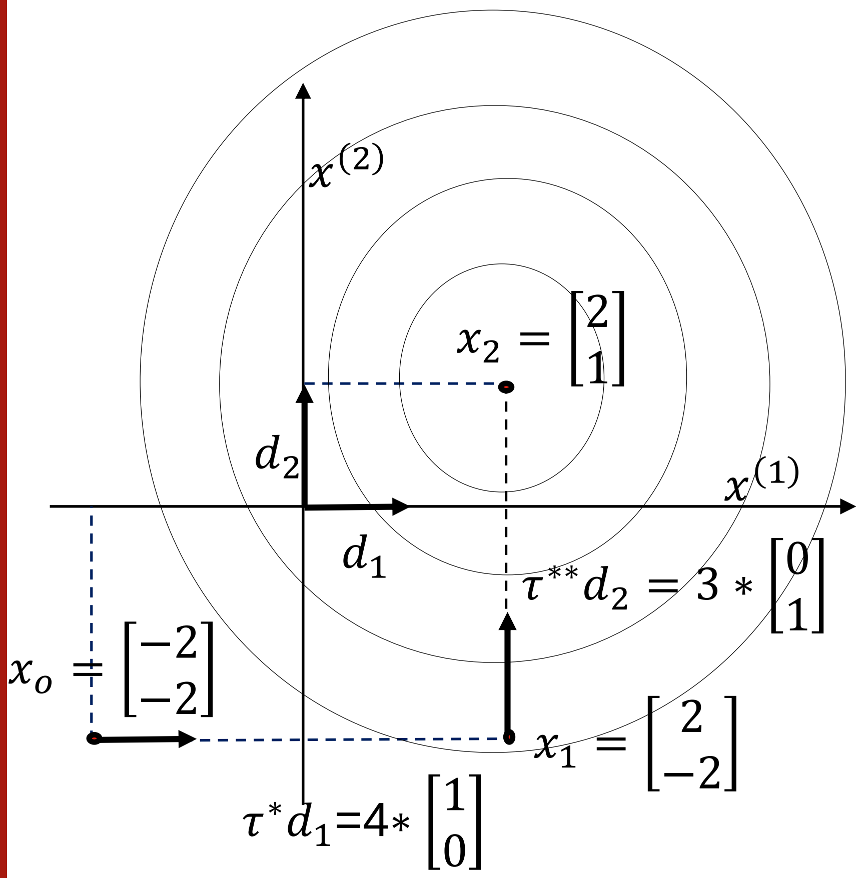
$$x_2 = x_1 + \tau d_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 0 * \tau \\ -2 + 1 * \tau \end{bmatrix}$$

$$F(x_1 + \tau d_2) = (2 - 2)^2 + (-2 + \tau - 1)^2 = 4 + (\tau - 3)^2 \triangleq f_2(\tau)$$

$$f_2'(\tau) = 2\tau^{**} - 6 = 0 \qquad \tau^{**} = 3$$

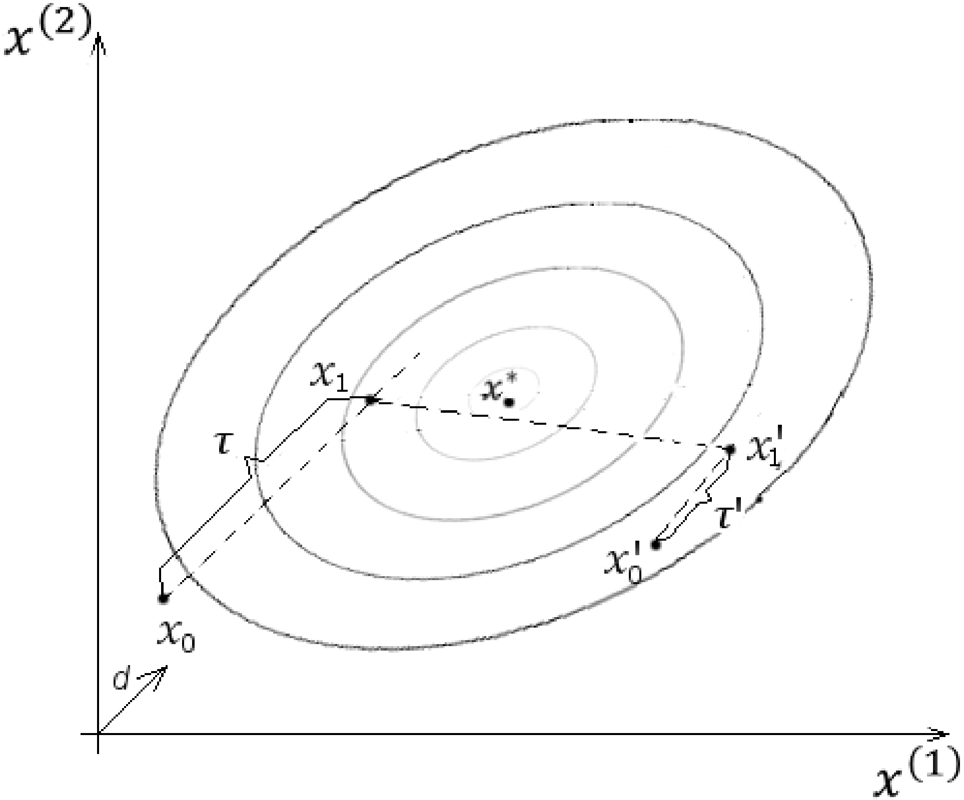
$$x_2 = x_1 + \tau d_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Politechnika Wrocławska



Metoda Powella

$F(x) = x^T A x + b^T + c$



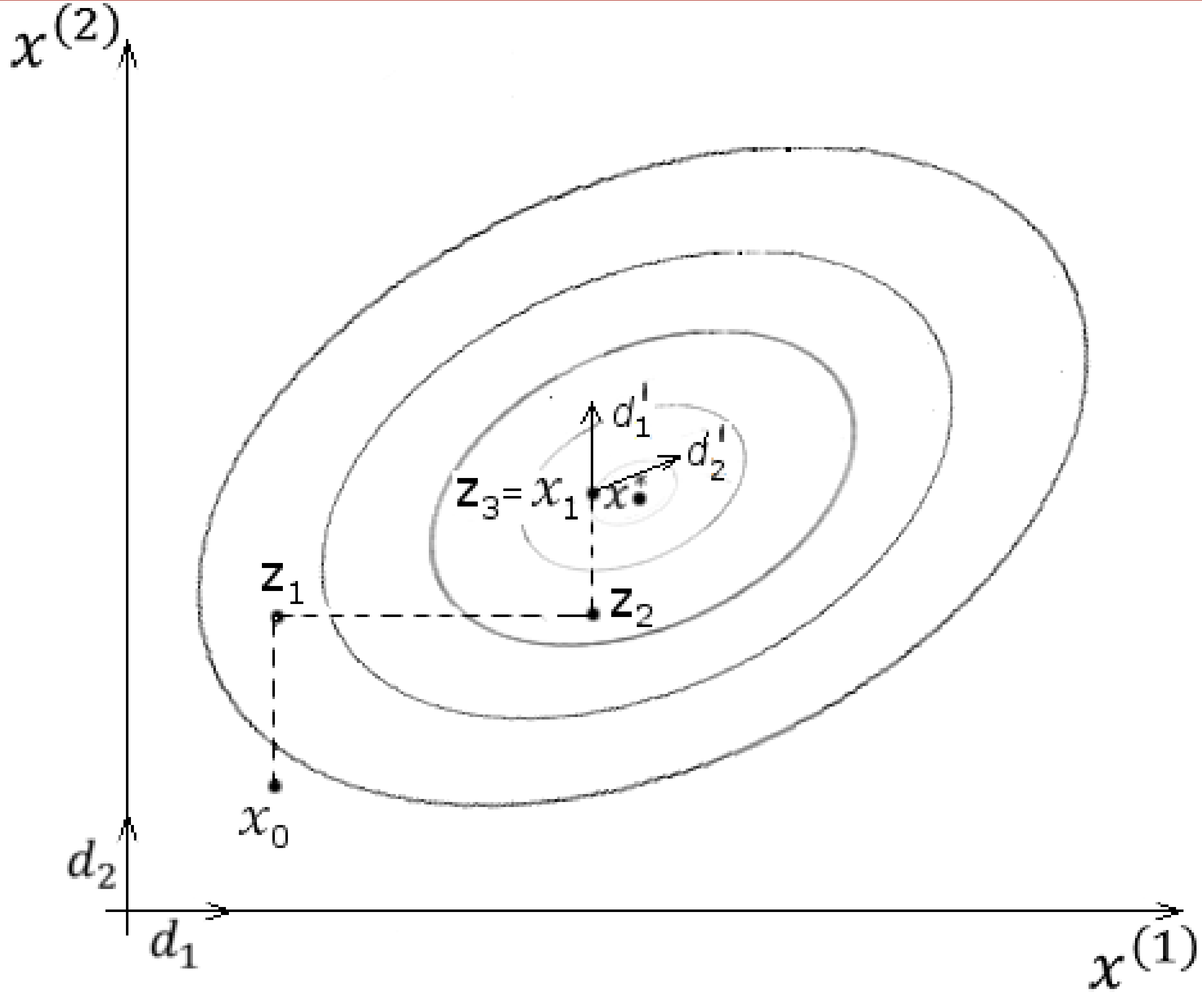
$x_1 = x_0 + x^* d$
τ^* - min w kierunku d z x_0
$x_1' = x_0' + \tau^{*\prime} d$
$\tau^{*\prime}$ - min w kierunku d z x_0'

$d^T A d' = 0$
d, d'- sprzężone według A

$$d' = \frac{x_1' - x_1}{\|x_1' - x_1\|}$$

Politechnika Wrocławska

Metoda Powella



Metoda Powella

DANE: $d_1, d_2, \dots, d_S, x_0, \varepsilon$

Krok 0: $z_1 := x_0 + \tau_S d_S, n := 0, s := 1$

τ_S - min w kierunku d_S

Krok 1: $z_{s+1} = z_s + \tau_s d_s$

τ_s - min w kierunku d_s

Krok 2: Jeśli $s < S, s := s + 1$ idź do kroku 1

Jeśli $\|z_{S+1} - z_1\| < \varepsilon$ - STOP

Krok 3: $x_{n+1} := z_{s+1}$

$d := \frac{z_{S+1} - z_1}{\|z_{S+1} - z_1\|}$

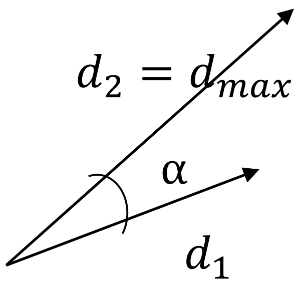
$z_1 := x_{n+1} + \tau d$ τ – min w kierunku d

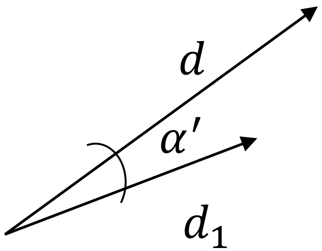
$d_s := d_{s+1}$ $s = 1, 2, \dots, S - 1$

$d_S := d$

Idź do Kroku 1

Metoda Powella - modyfikacja





$$\Delta = det[d_1\ d_2\ \cdots\ d_S] = \cos\alpha$$

$$\Delta = det[d_1\ d_2\ \cdots d_{max} \cdots d_S\,] = \cos\alpha$$

$$\uparrow d$$

$$\Delta' = det[d_1\ d_2\ \cdots d \cdots d_S\,] = \frac{\tau_{max}\Delta}{\|Z_{S+1} - Z_1\|} = \cos\alpha'$$

Krok 3: $x_{n+1} \coloneqq z_{s+1}$

$d \coloneqq \frac{Z_{S+1} - Z_1}{\|Z_{S+1} - Z_1\|}$

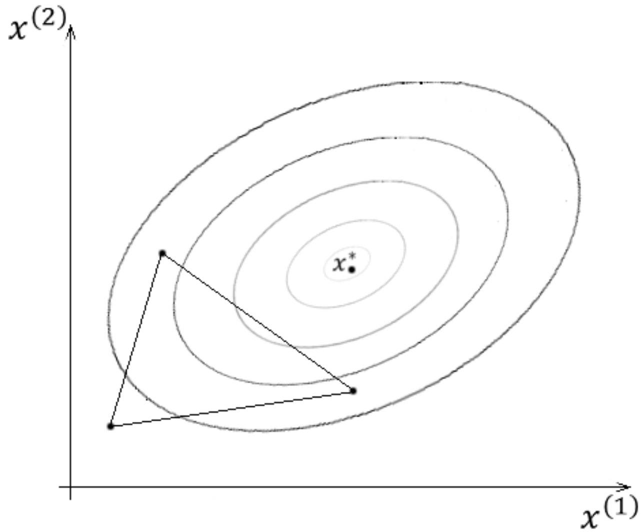
$z_1 \coloneqq\ x_{n+1} + \tau d \qquad \tau$ – min w kierunku d

$\tau_{max} \to \max_{1 \le s \le S} \|z_{s+1} - z_s\| = \max_{1 \le s \le S} \tau_s$

Jeżeli $\Delta \coloneqq \frac{\tau_{max}\Delta}{\|Z_{S+1} - Z_1\|} > 0.8\ d_{max} = d$ idż do kroku 1

MetodaNeldera-Meada (simplex)

$x_1\ x_2\ \ldots x_{S+1}$ - simplex w przestrzeni s-wymiarowej



$$x_H \rightarrow F(x_H) = \max_{1 \le s \le S+1} F(x_s)$$

$$x_L \rightarrow F(x_L) = \min_{1 \le s \le S+1} F(x_s)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{s} \sum_{s=1, s \neq H}^{S+1} x_s$$

Generowanie simplexu początkowego

x_0, c

$$a = \frac{c}{S\sqrt{2}}\left(\sqrt{S+1} + \sqrt{2} - 1\right)$$

$$\mathrm{b} = \frac{c}{S\sqrt{2}}\left(\sqrt{S+1} - 1\right)$$

$$d_j = \begin{bmatrix} a \\ \vdots \\ a \\ b \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} \quad \leftarrow j\ ty\ element$$

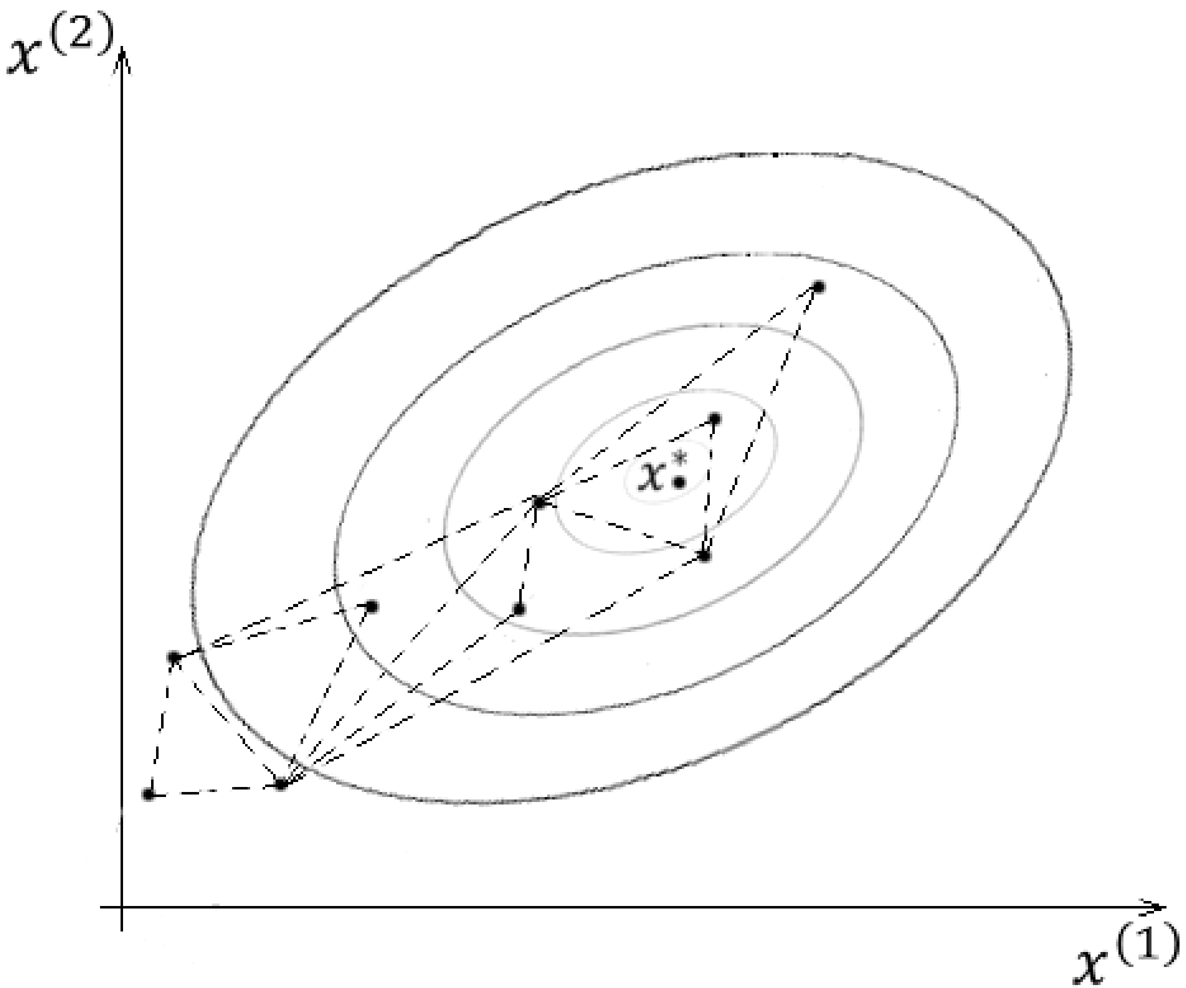
$$x_j = x_0 + d_j, x_{S+1} = x_0$$

$$x_j = x_0 + d_j, x_{S+1} = x_0$$

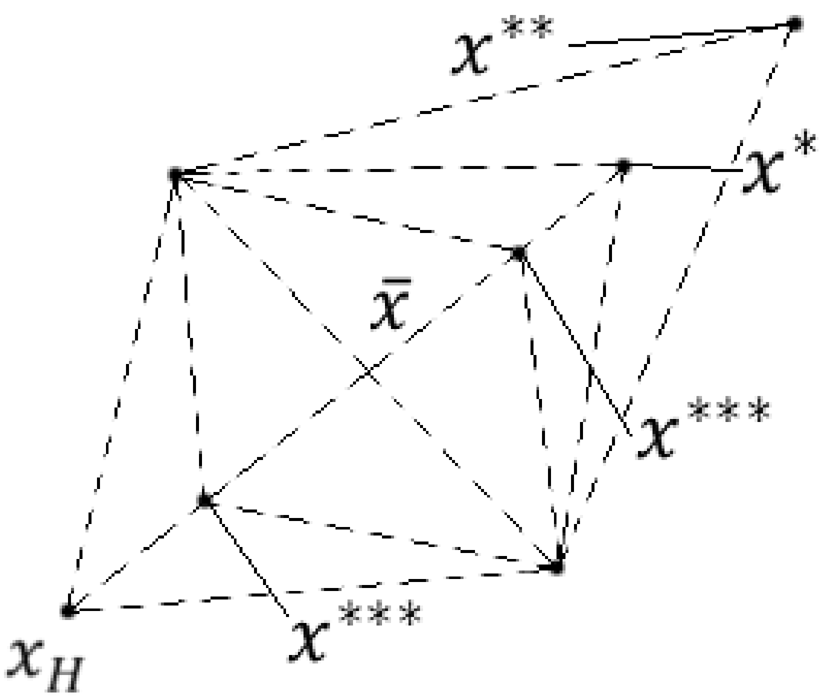
$$j = 1,2,\cdots,S$$

Politechnika Wrocławska

Metoda Neldera-Meada (simplex)



Metoda Neldera-Meada



Odbicie

$x^* = \bar{x} + \alpha(\bar{x} - x_H)$

α – współczynnik odbicia

Jeśli $\alpha > 0$

$F(x^*) < F(x_L)$

Ekspansja

$x^{**} = \bar{x} + \gamma(x^* - \bar{x}) \qquad \gamma > 1$

γ – współczynnik ekspansji

Kontrakcja

Jeśli $F(x^*) > F(x_H)$

$x^{***} = \bar{x} + \beta(x_H - \bar{x})$

Jeśli $F(x^*) > \max\limits_{\substack{1 \leq s \leq S+1 \\ s \neq H}} F(x_s)$

$x^{***} = \bar{x} + \beta(x^* - \bar{x}) \qquad \beta \in (0, 1)$

β – współczynnik kontrakcji

Metoda Neldera-Meada

DANE: x_0, c, ε

Krok 0: $x_1\ x_2\ \dots\ x_{S+1}$ - simplex początkowy, $n = 0$

Krok 1: $x_H \to F(x_H) = \max\limits_{1 \le s \le S+1} F(x_s), x_L \to F(x_L) = \min\limits_{1 \le s \le S+1} F(x_s)$

$\bar{x} = \frac{1}{S} \sum_{\substack{s=1 \\ s \ne H}}^{S+1} x_s$

Krok 2: $x^* = \bar{x} + \alpha(\bar{x} - x_H)$

Jeśli $F(x^*) < F(x_L)$ $\quad x^{**} = \bar{x} + \gamma(x^* - \bar{x})$ idź do kroku 3

w przeciwnym razie idź do kroku 4

Krok 3: Jeśli $F(x^{**}) < F(x^*)$ $\quad x_H = x^{**}, n = n + 1$ idź do kroku 1

w przeciwnym razie $x_H = x^*, n = n + 1$ idź do kroku 1

Krok 4: Jeśli $F(x^*) < \max\limits_{\substack{1 \le s \le S+1 \\ s \ne H}} F(x_s)$ $\quad x_H = x^*, n = n + 1$

Krok 5: $x' - \quad F(x') = \min\{F(x^*), F(x_H)\}$

$x^{***} = \bar{x} + \beta(x' - \bar{x})$

Jeśli $\mathrm{F}(x^{***}) > F(x')$ $\quad x_j = x_j + \frac{1}{2}(x_L - x_j), j = 1,2, \dots, S + 1$ idź do kroku 1

$x_H = x^{***}, n = n + 1$ idź do kroku 1

Dziękuję za uwagę