

Optymalizacja systemów

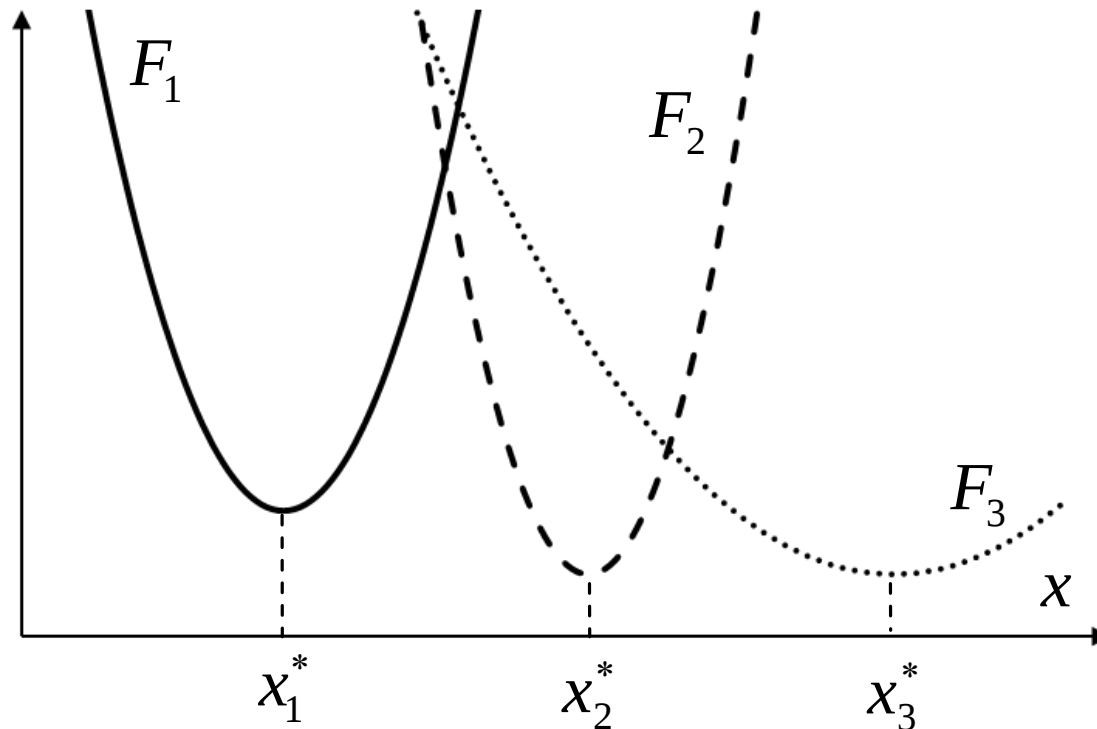


Wykład 14. Decyzje wielokryterialne - zadanie polioptymalizacji

Poliptymalizacja

x – wektor zmiennych decyzyjnych

$F_1(x), F_2(x), \dots, F_K(x)$ – wskaźniki jakości



Poliptymalizacja

Syntetyczny wskaźnik jakości

$$F(x) = H(F_1(x), F_2(x), \dots, F_K(x)) \quad H(.) - \text{funkcja monotoniczna ze względu na każdą składową}$$

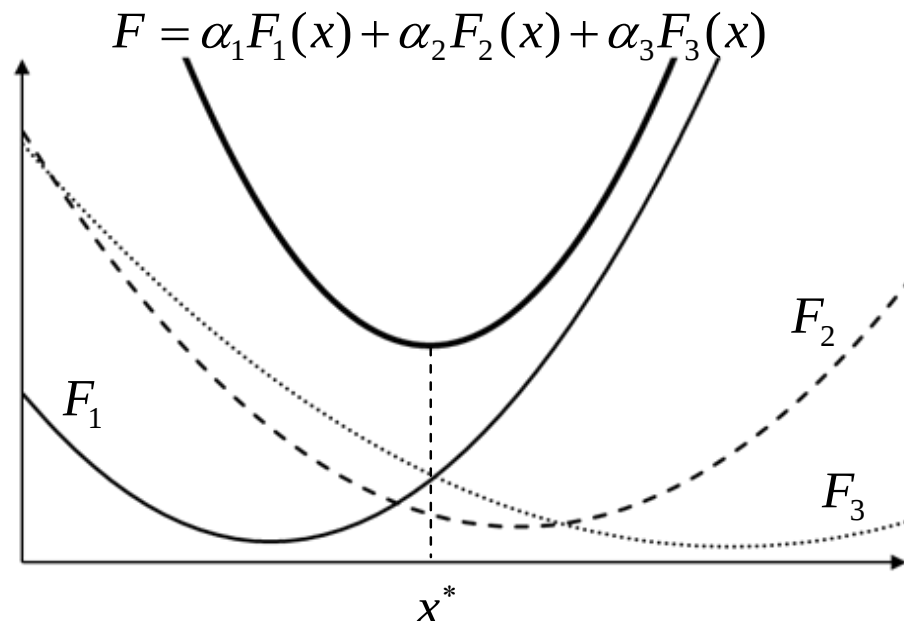
np.:
$$F(x) = \sum_{k=1}^K \alpha_k F_k(x)$$

gdzie:

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$F(x) = \prod_{k=1}^K F_k(x)$$

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$



Poliptymalizacja

Optymalizujemy wybrany wskaźnik,
Pozostałe wskaźniki spełnione są w sposób zadowalający.

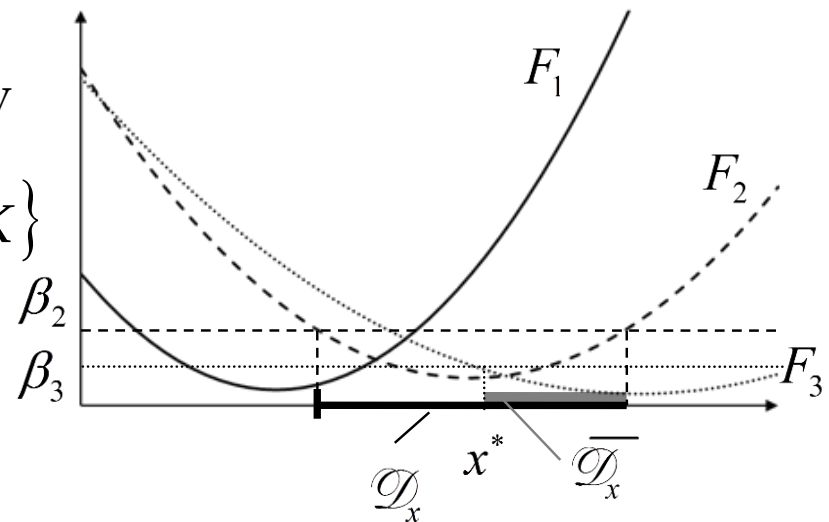
Niech $F_1(x)$ - wybrany wskaźnik

$$F_k(x) \leq \beta_k, \quad k = 2, 3, \dots, K$$

Wskaźniki spełnione w sposób zadowalający

$$\overline{\mathcal{D}}_x = \mathcal{D}_x \cap \{x \in \mathcal{R}^S : F_k(x) \leq \beta_k, k = 2, \dots, K\}$$

$$x^* \rightarrow F_1(x^*) = \min_{x \in \overline{\mathcal{D}}_x} F_1(x)$$



Poliptymalizacja

Uszeregowane wskaźniki jakości – priorytety wśród wskaźników

$$F_1(x) \succ F_2(x) \succ \dots \succ F_K(x) \quad x \in \mathcal{D}_x$$

Krok 1. $\mathcal{D}_{x1} = \mathcal{D}_x$

$$x_1^* \rightarrow F_1(x_1^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_{x1}} F_1(x)$$

Krok 2. $\mathcal{D}_{x2} = \mathcal{D}_{x1} \cap \left\{ x \in \mathcal{R}^S : F_1(x) \leq F_1(x_1^*) + \gamma_1 \right\}$

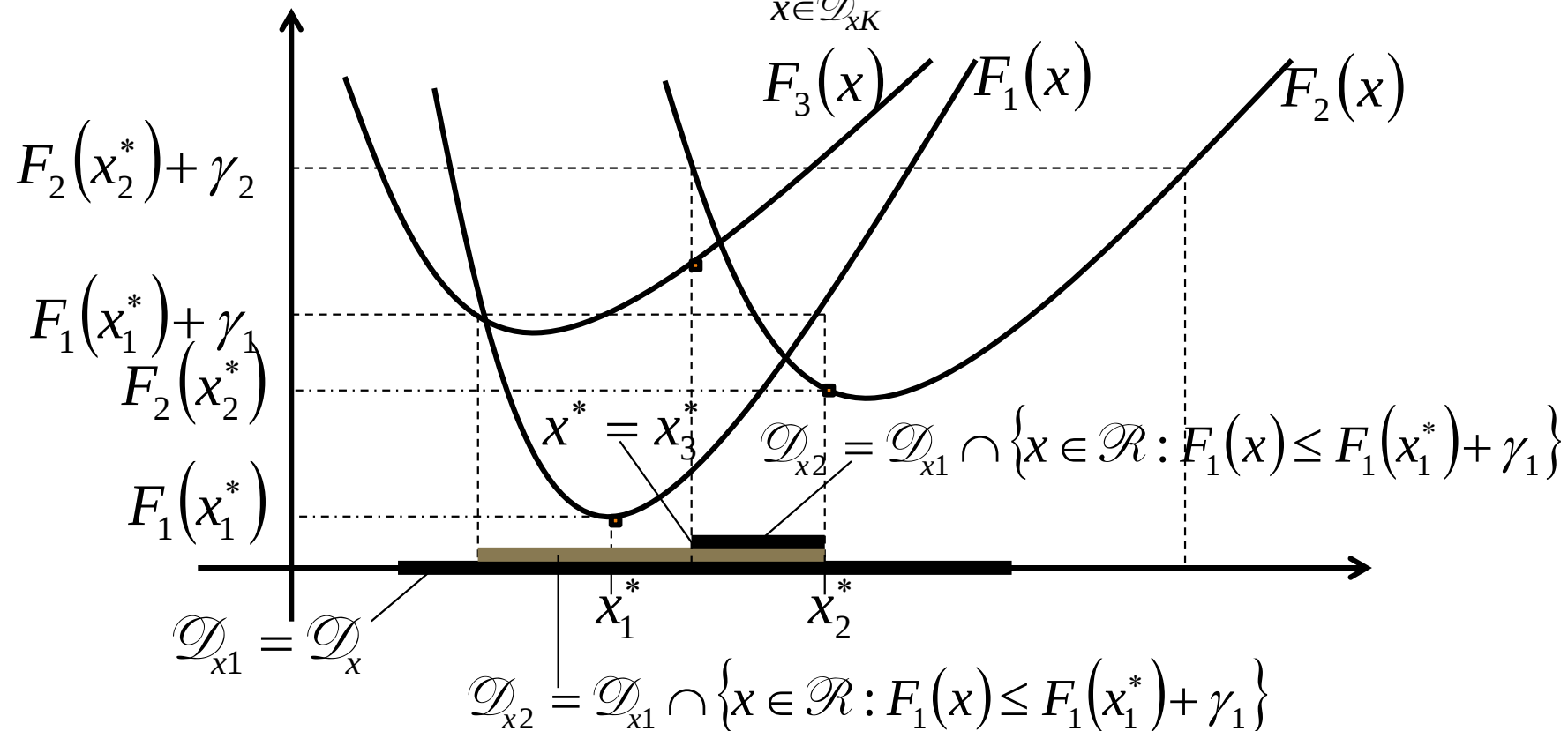
$$x_2^* \rightarrow F_2(x_2^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_{x2}} F_2(x)$$

⋮

Poliptymalizacja

Krok K. $\mathcal{D}_{xK} = \mathcal{D}_{xK-1} \cap \{x \in \mathcal{R}^s : F_{K-1}(x) \leq F_1(x_K^*) + \gamma_{K-1}\}$

$$x^* = x_K^* \rightarrow F_K(x_K^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_{xK}} F_K(x)$$



Zbiór punktów kompromisowych

Zbiór punktów kompromisowych – Pareto optymalnych

$$F_1(x), F_2(x), \dots, F_K(x) \quad x \in \mathcal{D}_x$$

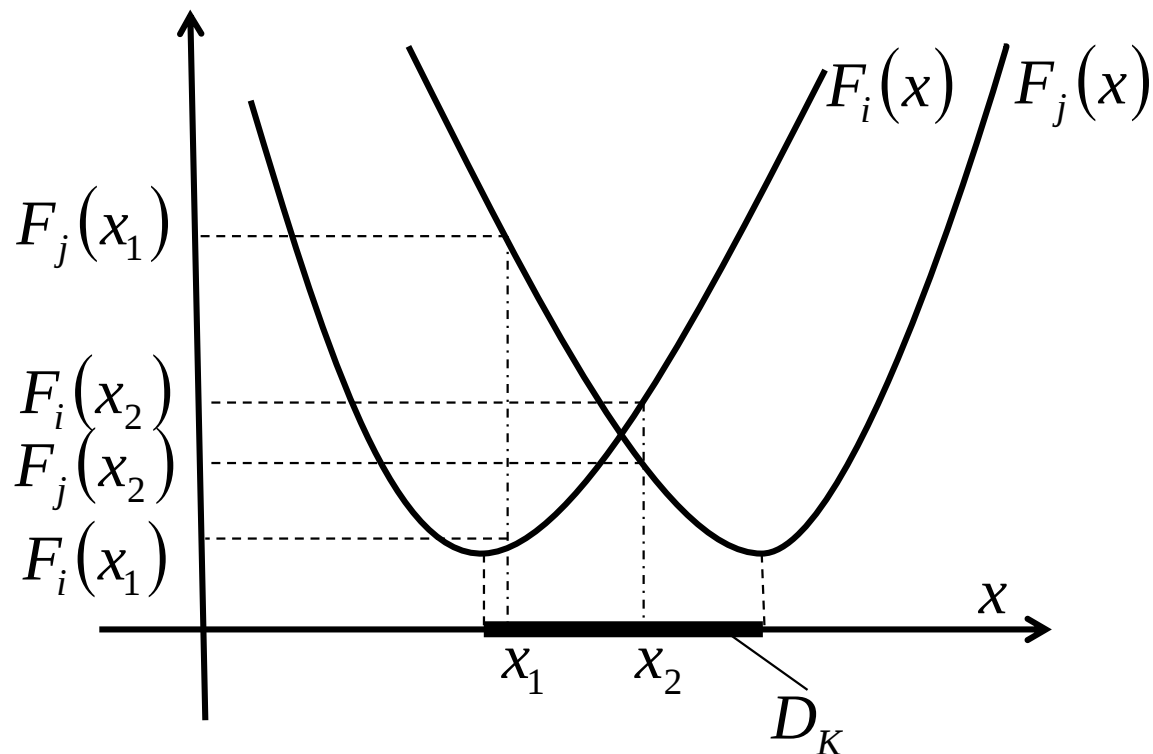
D_K - zbiór punktów kompromisowych

Zbiorem punktów kompromisowych - $D_K \subseteq \mathcal{D}_x$ nazywamy zbiór takich punktów $x \in \mathcal{D}_x$ dla których wartości wskaźników jakości spełniają następującą własność: jeden ze wskaźników może uzyskać mniejszą wartość za cenę zwiększenia co najmniej jednego z pozostałych wskaźników.

$$x_1, x_2 \in D_K \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, K\} \exists j \in \{1, 2, \dots, K\} \\ F_i(x_1) < F_j(x_2) \Rightarrow F_j(x_1) < F_i(x_2)$$

Zbiór punktów kompromisowych

$$x_1, x_2 \in D_K \Leftrightarrow \forall j \in \{1, 2, \dots, K\} \exists i \in \{1, 2, \dots, K\} \\ F_j(x_1) > F_j(x_2) \Rightarrow F_i(x_1) < F_i(x_2)$$



Zbiór punktów kompromisowych

Warunek analityczny:

$$\sum_{k=1}^K \eta_k \nabla_x F_k(x) = 0_S \quad \eta_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, K$$

Przykład:

$$F_1(x) = (x^{(1)} - 1)^2 + (x^{(2)} - 1)^2, \quad F_2(x) = (x^{(1)} + 1)^2 + (x^{(2)} + 1)^2$$

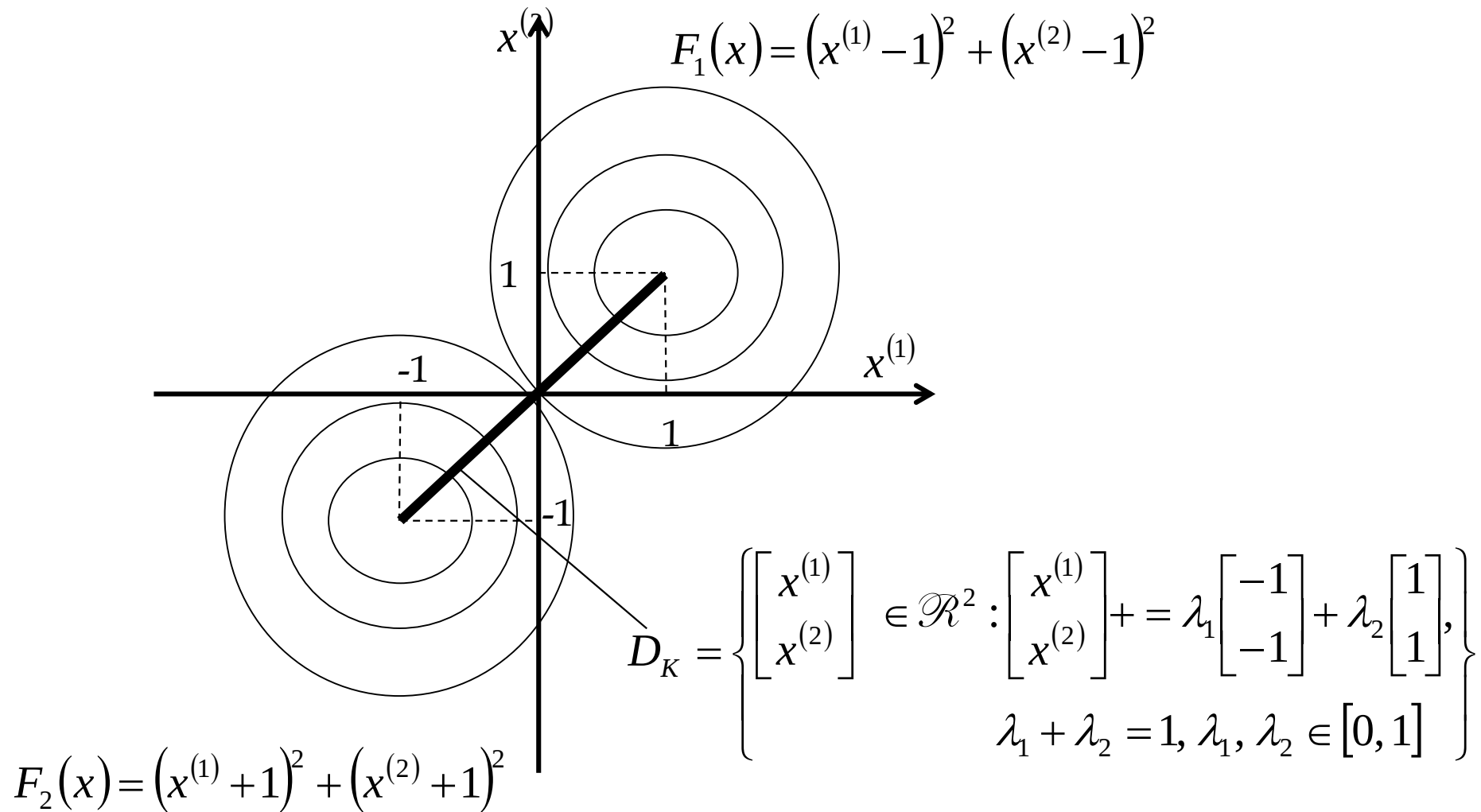
$$\eta_1 \begin{bmatrix} 2(x^{(1)} - 1) \\ 2(x^{(2)} - 1) \end{bmatrix} + \eta_2 \begin{bmatrix} 2(x^{(1)} + 1) \\ 2(x^{(2)} + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad / 2 \quad \eta_1, \eta_2 \geq 0$$

$$\eta_1 \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix} + \eta_2 \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix} = \eta_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \eta_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad / (\eta_1 + \eta_2)$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix} + \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix} + = \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \lambda_1 = \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}, \lambda_2 = \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$$

Zbiór punktów kompromisowych



Dziękuję za uwagę

