



Politechnika Wrocławska

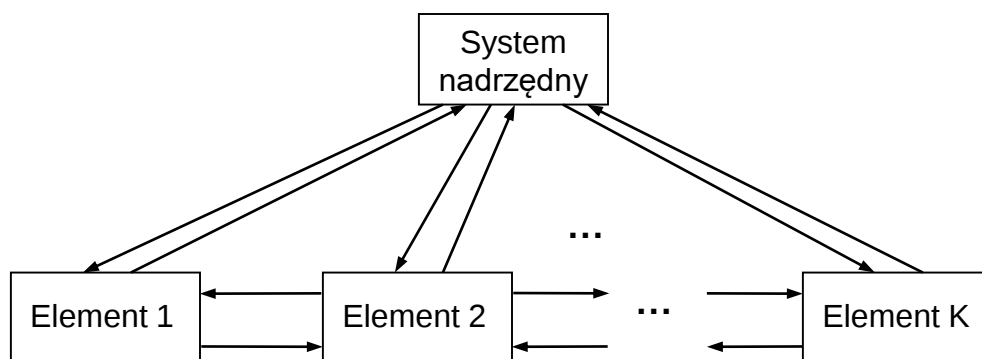
Optymalizacja systemów

Wykład 13. Dekompozycja zadania optymalizacji

Dekompozycja zadania optymalizacji - motywacja

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

1. Duży wymiar wektora decyzyjnego – dekompozycja na mniejsze zadania;
2. Grupy zmiennych dotyczą różnych, niezależnych decyzji
3. Złożona struktura decyzyjna – poszczególne decyzje dotyczą różnych obiektów, np.: dwupoziomowy system zarządzania





Separowalna funkcja celu

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{R}^S} F(x)$$

$$x = \begin{bmatrix} x^I \\ x^{II} \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix}, x \in \mathcal{R}^S = \mathcal{R}^{S_I} \times \mathcal{R}^{S_{II}} \times \dots \times \mathcal{R}^{S_K}, x^k \in \mathcal{R}^{S_k}, k = I, II, \dots, K, \sum_{k=I}^K S_k = S$$

$$F(x) = H\left(F_I(x^I), F_{II}(x^{II}), \dots, F_K(x^K)\right)$$

Funkcja $H(\cdot)$ jest funkcją niemalejącą ze względu na każdą ze składowych, np.:

$$F(x) = \sum_{k=I}^K \alpha_k F_k(x^k), \alpha_k \geq 0, k = I, II, \dots, K$$

$$F(x) = \prod_{k=I}^K F_k(x^k)$$

Separowalna funkcja celu

$$\min_{x \in \mathcal{R}^{\mathcal{S}}} F(x) = \min_{x \in \mathcal{R}^{\mathcal{S}}} H\left(F_I(x^I), F_{II}(x^{II}), \dots, F_K(x^K)\right) = \\ H\left(\min_{x^I \in \mathcal{R}^{\mathcal{I}}} F_I(x^I), \min_{x^{II} \in \mathcal{R}^{\mathcal{II}}} F_{II}(x^{II}), \dots, \min_{x^K \in \mathcal{R}^{\mathcal{K}}} F_K(x^K)\right)$$

W takiej sytuacji złożone zadanie optymalizacji można zdekomponować na K niezależnych zadań optymalizacji, czyli zadanie:

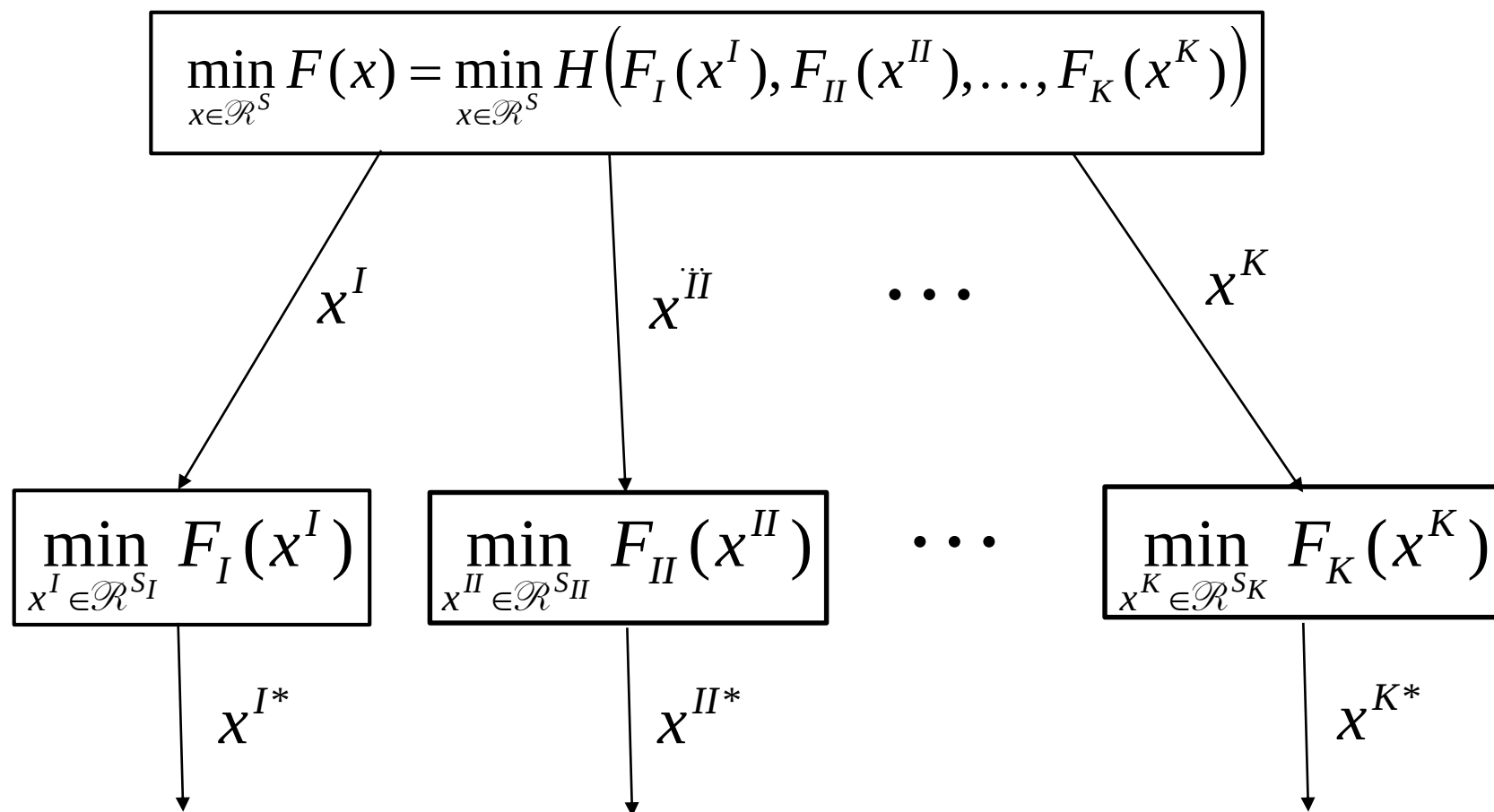
$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{R}^{\mathcal{S}}} F(x)$$

jest równoważne zadaniom:

$$x^{k*} \rightarrow F_k(x^{k*}) = \min_{x^k \in \mathcal{R}^{\mathcal{S}_k}} F_k(x^k), k = I, II, \dots, K$$



Separowalna funkcja celu



Separowalna funkcja celu - przykład

$$F(x) = x^T A x + b^T x$$

$$x = \begin{bmatrix} x^I \\ x^{II} \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b^I \\ b^{II} \\ \vdots \\ b^K \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{II} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_K \end{bmatrix}, x, b \in R^S = R^{S_I} \times R^{S_{II}} \times \cdots \times R^{S_K},$$
$$x^k, b^k \in R^{S_k}, A_k \in R^{S_k} \times R^{S_k},$$
$$k = I, II, \dots, K, \sum_{k=I}^K S_k = S$$

$$F(x) = x^T A x + b^T x =$$

$$= x^{I^T} A_I x^I + b^{I^T} x^I + x^{II^T} A_{II} x^{II} + b^{II^T} x^{II} + \cdots + x^{K^T} A_K x^K + b^{K^T} x^K$$



Separowalna funkcja celu - przykład

$$\begin{aligned} x^* \rightarrow F(x^*) &= \min_{x \in \mathcal{R}^{\mathcal{S}}} F(x) = \min_{x \in \mathcal{R}^{\mathcal{S}}} (x^T A x + b^T x) = \\ &= \min_{x \in \mathcal{R}^{\mathcal{S}_I}} (x^{I^T} A_I x^I + b^{I^T} x^I) + \min_{x \in \mathcal{R}^{\mathcal{S}_{II}}} (x^{II^T} A_{II} x^{II} + b^{II^T} x^{II}) + \dots + \min_{x \in \mathcal{R}^{\mathcal{S}_K}} (x^{K^T} A_K x^K + b^{K^T} x^K) \end{aligned}$$

$$x^{k*} \rightarrow x^{k*T} A_k x^{k*} + b^{k^T} x^{k*} = \min_{x \in \mathcal{R}^{S_k}} (x^{k^T} A_k x^k + b^{k^T} x^k), k = 1, 2, \dots, K$$

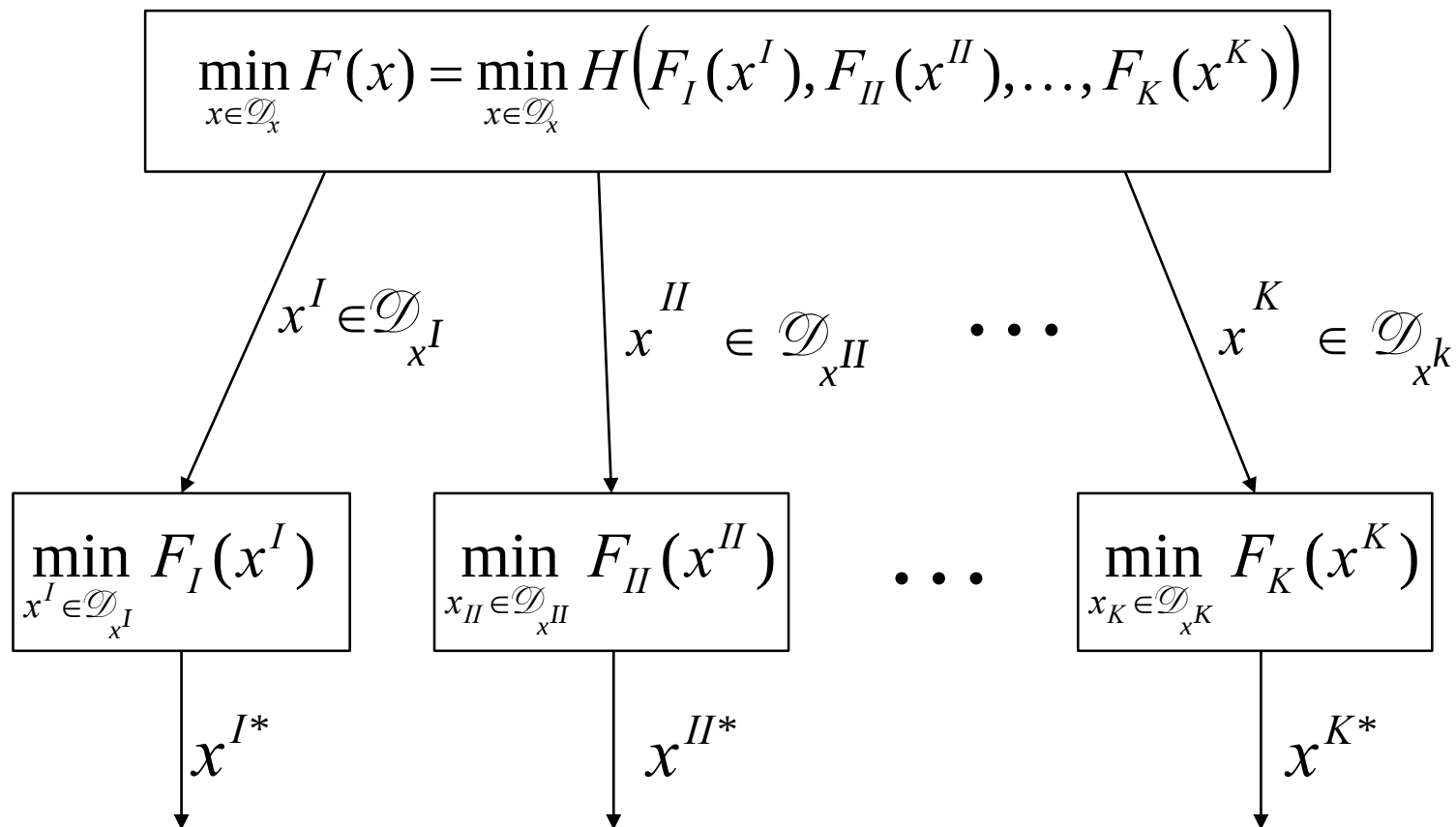
$$x^* = \arg \min_{x \in \mathcal{R}^S} (x^T A x + b^T x) = \begin{bmatrix} x^{I*} \\ x^{II*} \\ \vdots \\ x^{K*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arg \min_{x \in \mathcal{R}^{S_I}} (x^{I^T} A_I x^I + b^{I^T} x^I) \\ \arg \min_{x \in \mathcal{R}^{S_{II}}} (x^{II^T} A_{II} x^{II} + b^{II^T} x^{II}) \\ \vdots \\ \arg \min_{x \in \mathcal{R}^{S_K}} (x^{K^T} A_K x^K + b^{K^T} x^K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_I^{-1} b^I \\ A_{II}^{-1} b^{II} \\ \vdots \\ A_K^{-1} b^K \end{bmatrix}$$

Separowalne ograniczenia

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x) \quad F(x) = H(F_I(x^I), F_{II}(x^{II}), \dots, F_K(x^K))$$
$$x = \begin{bmatrix} x^I \\ x^{II} \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix}, \quad x \in \mathcal{D}_x \subset \mathcal{R}^S, \mathcal{D}_x = \mathcal{D}_{x^I} \times \mathcal{D}_{x^{II}} \times \dots \times \mathcal{D}_{x^K}$$
$$x^k \in \mathcal{D}_{x^k} \subset \mathcal{R}^{S_k}, k = I, II, \dots, K, \sum_{k=I}^K S_k = S$$
$$\mathcal{D}_{x^k} = \{x^k \in \mathcal{R}^{S_k}; \varphi_l^k(x^k) = 0, l = 1, 2, \dots, L_k, \psi_m^k(x^k) \leq 0, m = 1, 2, \dots, M_k\}$$

$$\min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} H(F_I(x^I), F_{II}(x^{II}), \dots, F_K(x^K)) =$$
$$H\left(\min_{x^I \in \mathcal{D}_{x^I}} F_I(x^I), \min_{x^{II} \in \mathcal{D}_{x^{II}}} F_{II}(x^{II}), \dots, \min_{x^K \in \mathcal{D}_{x^K}} F_K(x^K)\right)$$

Separowalne ograniczenia



Separowalna funkcja celu i separowalnymi ograniczeniami ze zmienną koordynacyjną

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x) \quad F(x) = H(F_I(x^I, w), F_{II}(x^{II}, w), \dots, F_K(x^K, w))$$

$$x \in D_x \subset R^S, D_x = \{x \in R^S; \varphi(x) = 0_L, \psi(x) \leq 0_M\}$$

$$D_x = \left\{ x = \begin{bmatrix} x^I \\ x^{II} \\ \vdots \\ x^K \\ w \end{bmatrix} \in R^S, \varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi^I(x^I, w) \\ \varphi^{II}(x^{II}, w) \\ \vdots \\ \varphi^K(x^K, w) \\ \varphi^w(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{L_I} \\ 0_{L_{II}} \\ \vdots \\ 0_{L_K} \\ 0_{L_w} \end{bmatrix} = 0_L, \psi(x) = \begin{bmatrix} \psi^I(x^I, w) \\ \psi^{II}(x^{II}, w) \\ \vdots \\ \psi^K(x^K, w) \\ \psi^w(w) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0_{M_I} \\ 0_{M_{II}} \\ \vdots \\ 0_{M_K} \\ 0_{M_w} \end{bmatrix} = 0_M \right\}$$

$$\sum_{k=I}^K L_k + L_w = L, \sum_{k=I}^K M_k + M_w = M$$

Separowalna funkcja celu i separowalnymi ograniczeniami ze zmienną koordynacyjną

$$x = \begin{bmatrix} x^I \\ x^{II} \\ \vdots \\ x^K \\ w \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} x &\in D_x \subset R^S, D_x = \bigcup_{w \in D_w} D_{x^I}(w) \times D_{x^{II}}(w) \times \cdots \times D_{x^K}(w) \\ x^k &\in D_{x^k}(w) \subset R^{S_k}, w \in D_w \subset R^{S_w} \quad k = I, II, \dots, K, \sum_{k=I}^K S_k + S_w = S \\ D_{x^k}(w) &= \{x^k \in R^{S_k}; \varphi_l^k(x^k, w) = 0, l = 1, 2, \dots, L_k, \psi_m^k(x^k, w) \leq 0, m = 1, 2, \dots, M_k\} \\ D_w &= \{w \in R^{S_w}; \varphi_l^w(w) = 0, l = 1, 2, \dots, L_w, \psi_m^w(w) = 0, m = 1, 2, \dots, M_w\} \end{aligned}$$

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} H(F_I(x^I, w), F_{II}(x^{II}, w), \dots, F_K(x^K, w)) =$$

$$\min_{w \in \mathcal{D}_w} H \left(\min_{x^I \in \mathcal{D}_{x^I}(w)} F_I(x^I, w), \min_{x^{II} \in \mathcal{D}_{x^{II}}(w)} F_{II}(x^{II}, w), \dots, \min_{x^K \in \mathcal{D}_{x^K}(w)} F_K(x^K, w) \right)$$

Separowalna funkcja celu i separowalnymi ograniczeniami ze zmienną koordynacyjną

Zadanie rozwiązujemy w dwóch etapach.

Etap I: Dla ustalonej zmiennej koordynacyjnej w rozwiązujemy K zadań

$$x^{k*}(w) \rightarrow F_k(x^{k*}(w), w) = \min_{x^k \in D_{x^k}(w)} F_k(x^k, w), \quad k = 1, 2, \dots, K$$

Następnie wyznaczamy wartość funkcji:

$$\bar{F}(w) \stackrel{\Delta}{=} H(F_I(x^{I*}(w), w), F_{II}(x^{II*}(w), w), \dots, F_K(x^{K*}(w), w))$$

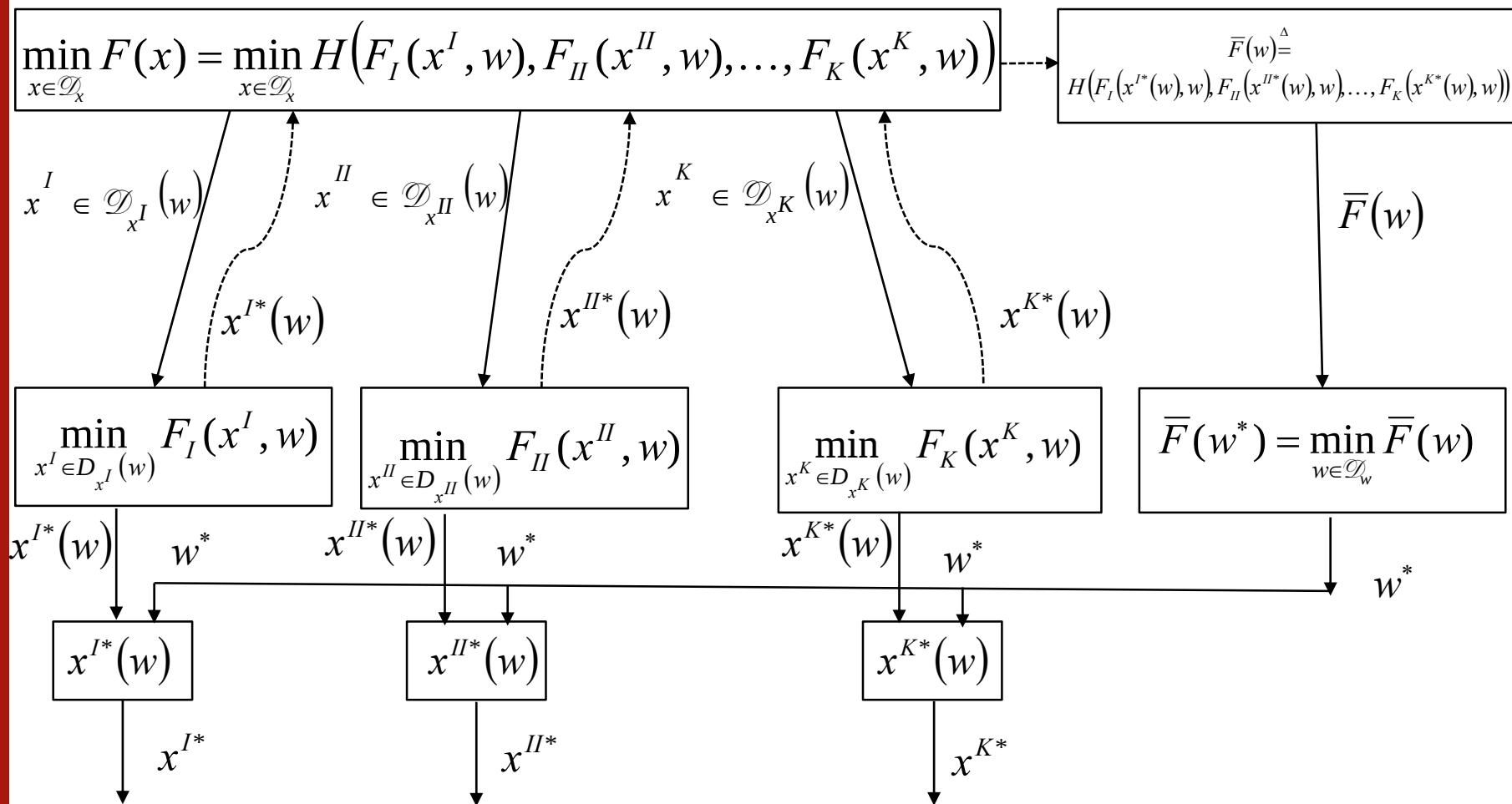
Etap II: wyznaczamy optymalną wartość zmiennej koordynacyjnej rozwiązując zadanie:

$$w^* \rightarrow \bar{F}(w^*) = \min_{w \in \mathcal{Q}_w} \bar{F}(w)$$

ostatecznie

$$x^{k*} = x^{k*}(w^*), \quad k = 1, 2, \dots, K$$

Separowalna funkcja celu i separowalnymi ograniczeniami ze zmienną koordynacyjną



Separowalna funkcja celu i separowalnymi ograniczeniami ze zmienną koordynacyjną

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$x \in \mathcal{D}_x \subset \mathcal{R}^S, \mathcal{D}_x = \{x \in \mathcal{R}^S; \varphi(x) = 0_L, \psi(x) \leq 0_M\}$$

$$F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$D_x = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in R^4; \varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 - 3 \\ x_2 + x_4 - 1 \\ x_3 + x_4 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^I \\ x^{II} \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Separowalna funkcja celu i separowalnymi ograniczeniami ze zmienną koordynacyjną

Wówczas:

$$F(x) = (x^I)^2 + (x^{II})^2 + (w_1)^2 + (w_2)^2;$$

$$F_I(x^I, w) = (x^I)^2 + (w_1)^2,$$

$$F_{II}(x^{II}, w) = (x^{II})^2 + (w_2)^2$$

$$\mathcal{D}_{x^I}(w) = \{x^I \in \mathcal{R}^1; \varphi_1^I(x^I, w) = x^I + w_1 - 3 = 0\}$$

$$\mathcal{D}_{x^{II}}(w) = \{x^{II} \in \mathcal{R}^1; \varphi_1^{II}(x^{II}, w) = x^{II} + w_2 - 1 = 0\}$$

$$\mathcal{D}_w = \left\{ w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^2; \varphi_1^w(w) = w_1 + w_2 - 3 = 0 \right\}$$

Separowalna funkcja celu i separowalnymi ograniczeniami ze zmienną koordynacyjną

Wówczas:

$$F(x) = (x^I)^2 + (x^{II})^2 + (w_1)^2 + (w_2)^2 \quad ;$$

$$F_I(x^I, w) = (x^I)^2 + (w_1)^2 \\ \mathcal{D}_{x^I}(w) = \{x^I \in \mathcal{R}^1; \varphi_1^I(x^I, w) = x^I + w_1 - 3 = 0\}$$

$$F_{II}(x^{II}, w) = (x^{II})^2 + (w_2)^2 \\ \mathcal{D}_{x^{II}}(w) = \{x^{II} \in \mathcal{R}^1; \varphi_1^{II}(x^{II}, w) = x^{II} + w_2 - 1 = 0\}$$

$$\mathcal{D}_w = \left\{ w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^2; \varphi_1^w(w) = w_1 + w_2 - 3 = 0 \right\}$$

Separowalna funkcja celu i separowalnymi ograniczeniami ze zmienną koordynacyjną

Etap I:

$$x^{I*}(w) \rightarrow F_I(x^{I*}(w), w) = \min_{x^I \in \mathcal{D}_{x^I}(w)} F_k(x^I, w) = \min_{x^I \in \mathcal{D}_{x^I}(w)} \left((x^I)^2 + (w_1)^2 \right)$$

$$\mathcal{D}_{x^I}(w) = \{x^I \in \mathcal{R}^1; \varphi_1^I(x^I, w) = x^I + w_1 - 3 = 0\}$$

$$x^{I*}(w) = 3 - w_1$$

$$x^{II*}(w) \rightarrow F_{II}(x^{II*}(w), w) = \min_{x^{II} \in \mathcal{D}_{x^{II}}(w)} F_k(x^{II}, w) = \min_{x^{II} \in \mathcal{D}_{x^{II}}(w)} \left((x^{II})^2 + (w_2)^2 \right)$$

$$\mathcal{D}_{x^{II}}(w) = \{x^{II} \in \mathcal{R}^1; \varphi_1^{II}(x^{II}, w) = x^{II} + w_2 - 1 = 0\}$$

$$x^{II*}(w) = 1 - w_2$$

$$\bar{F}(w) \stackrel{\Delta}{=} H(F_I(x^{I*}(w), w), F_{II}(x^{II*}(w), w)) = (3 - w_1)^2 + (w_1)^2 + (1 - w_2)^2 + (w_2)^2$$

Separowalna funkcja celu i separowalnymi ograniczeniami ze zmienną koordynacyjną

Etap II:

$$w^* \rightarrow \bar{F}(w^*) = \min_{w \in \mathcal{D}_w} \bar{F}(w) = \min_{w \in \mathcal{D}_w} \left((3 - w_1)^2 + (w_1)^2 + (1 - w_2)^2 + (w_2)^2 \right)$$

$$\mathcal{D}_w = \left\{ w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^2; \varphi_1^w(w) = w_1 + w_3 - 3 = 0 \right\}$$

$$w_1^* = 2, w_2^* = 1,$$

Wracamy do rozwiązania z Etapu I

$$x^{I*}(w^*) = 3 - w_1^* = 1, \quad x^{II*}(w^*) = 1 - w_2^* = 0.$$

Dziękuję za uwagę

