

Optymalizacja systemów



Wykład 10. Podejmowanie decyzji w warunkach niepewności

Niepewność – zmienna losowa



Problem wyboru wariantu

Rozważmy przykład:

Mamy sieć I kopalni, które należy zmodernizować. Istnieje J wariantów modernizacji i każdy z nich o koszcie c_{ij} jeśli i -ta kopalnia jest modernizowana na j -ty sposób ($i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, J$). Urobek każdej z kopalni wynosi u_{ij} - jeśli i -ta kopalnia jest modernizowana na j -ty sposób. Zanieczyszczenia urobku w każdej z kopalni wynoszą z_{ij} - jeśli i -ta kopalnia jest modernizowana na j -ty sposób. Należy dobrać warianty modernizacji kolejnych kopalni tak, aby łączne urobek nie spadły poniżej u , zanieczyszczenia urobku spełniały wymagania rynkowe, czyli były mniejsze niż z a łączny koszt modernizacji był minimalny.

Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności

$$F(x, c) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} x_{ij}$$

x_{ij} - zmienna decyzyjna

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J u_{ij} x_{ij} \geq u$$

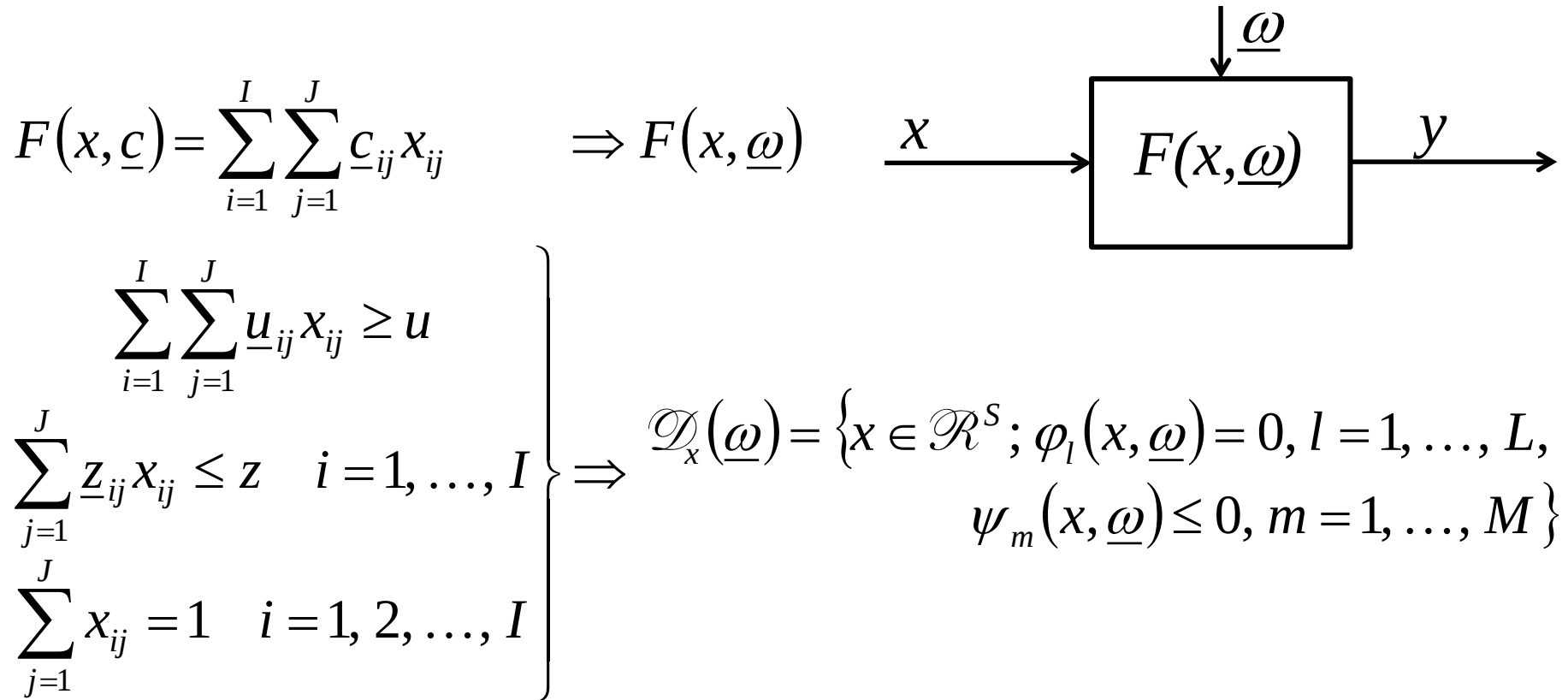
$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{- } i \text{ - ta kopalnia modernizowana} \\ & \text{na } j \text{ - ty sposób} \\ 0 & \text{- w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^J z_{ij} x_{ij} \leq z \quad i = 1, 2, \dots, I$$

$$\sum_{j=1}^J x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, I$$

Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności

$\{\underline{c}_{ij}, \underline{u}_{ij}, \underline{z}_{ij} \mid i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J\} = \underline{\omega}$ - wielkości niepewne (losowe)



Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności

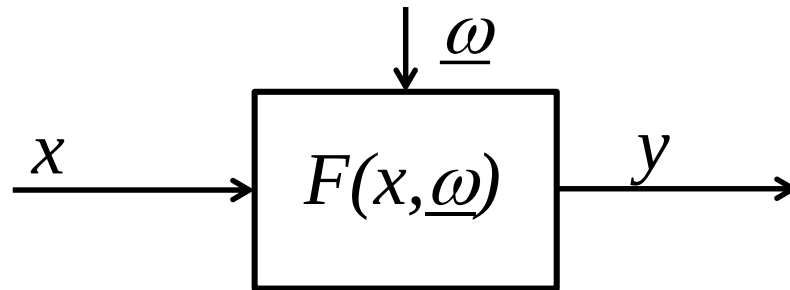
$$E_{\underline{c}}[F(x, \underline{c})] = E_{\underline{c}} \left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \underline{c}_{ij} x_{ij} \right]$$

$$E_{\underline{u}} \left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \underline{u}_{ij} x_{ij} \right] \geq u$$

$$E_{\underline{z}} \left[\sum_{j=1}^J \underline{z}_{ij} x_{ij} \right] \leq z \quad i = 1, 2, \dots, I$$

$$\sum_{j=1}^J x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, I$$

Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności



$$F(x) = E_{\underline{\omega}}[F(x, \underline{\omega})]$$

$$\mathcal{D}_x = E_{\underline{\omega}}[\mathcal{D}_x(\underline{\omega})] =$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{R}^S; E_{\underline{\omega}}[\varphi_l(x, \underline{\omega})] = 0, l = 1, \dots, L, E_{\underline{\omega}}[\psi_m(x, \underline{\omega})] \leq 0, m = 1, \dots, M \right\}$$

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in D_x} F(x)$$

Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności

ω - wartość zmiennej losowej $\underline{\omega}$

$\omega \in \Omega$ - zbiór ciągły, $f_{\omega}(\omega)$ - funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\underline{\omega}$

Wówczas:

$$F(x) = \underset{\underline{\omega}}{E}[F(x, \underline{\omega})] = \int_{\Omega} F(x, \omega) f_{\omega}(\omega) d\omega$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x &= \underset{\underline{\omega}}{E}[\mathcal{D}_x(\underline{\omega})] = \\ &= \left\{ x \in \mathcal{R}^S; \underset{\underline{\omega}}{E}[\varphi_l(x, \underline{\omega})] = \int_{\Omega} \varphi_l(x, \omega) f_{\omega}(\omega) d\omega = 0, l = 1, \dots, L, \right. \\ &\quad \left. \underset{\underline{\omega}}{E}[\psi_m(x, \underline{\omega})] = \int_{\Omega} \psi_m(x, \omega) f_{\omega}(\omega) d\omega \leq 0, m = 1, \dots, M \right\} \end{aligned}$$

Podjmowanie decyzji w warunkach niepewności

ω - wartość zmiennej losowej $\underline{\omega}$

$\omega \in \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\}$ - zbiór dyskretny,

$P(\underline{\omega} = \omega_k) = p_k, k = 1, 2, \dots, K$ - gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\underline{\omega}$

Wówczas:

$$F(x) = E_{\underline{\omega}}[F(x, \underline{\omega})] = \sum_{k=1}^K F(x, \omega_k) p_k$$

$$\mathcal{D}_x = E_{\underline{\omega}}[\mathcal{D}_x(\underline{\omega})] =$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{R}^S; E_{\underline{\omega}}[\varphi_l(x, \underline{\omega})] = \sum_{k=1}^K \varphi_l(x, \omega_k) p_k = 0, l = 1, \dots, L, \right.$$

$$\left. E_{\underline{\omega}}[\psi_m(x, \underline{\omega})] = \sum_{k=1}^K \psi_m(x, \omega_k) p_k \leq 0, m = 1, \dots, M \right\}$$

Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności

Problem sprzedawcy gazet.

Sprzedawca gazet zamawia gazety w paczkach po 40 sztuk w paczce. Cena jednej gazety w hurcie kosztuje 0.80 zł, a sprzedaje ją po 1.10 zł. Popyt na gazety $\underline{\omega}$ jest wielkością losową. Sprzedaż w „słaby” dzień $\omega_1 = 50$ gazet, w „przeciętny” dzień $\omega_2 = 100$ gazet, a w „dobry” dzień $\omega_3 = 150$ gazet. Prawdopodobieństwo że jest „słaby” dzień, tj.: $P(\underline{\omega} = \omega_1) = p_1 = 0.26$, „przeciętny” - $P(\underline{\omega} = \omega_2) = p_2 = 0.40$, a „dobry” - $P(\underline{\omega} = \omega_3) = p_3 = 0.34$

Zmienna decyzyjna x – liczba paczek, którą powinien zamówić sprzedawca.

$x = 1, 2, 3, 4, \dots ?$

Podjmowanie decyzji w warunkach niepewności

Funkcja celu:

$$F(x, \underline{\omega}) = \begin{cases} 40x \times 0.30 & \text{if } 40x < \underline{\omega} \\ \underline{\omega} \times 0.30 - (40x - \underline{\omega}) \times 0.80 & \text{if } 40x \geq \underline{\omega} \end{cases}$$

Wartość funkcji celu dla $x = 1, 2, 3$ i 4

x	$\omega_1 = 50$	$\omega_2 = 100$	$\omega_3 = 150$
	$p_1 = 0.26$	$p_2 = 0.40$	$p_3 = 0.34$
$x=1$	12	12	12
$x=2$	-9	24	24
$x=3$	-41	14	36
$x=4$	-73	-18	37

Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności

$$F(x) = E_{\underline{\omega}}[F(x, \underline{\omega})] = \sum_{k=1}^K F(x, \omega_k) p_k$$

$$F(x=1) = E_{\underline{\omega}}[F(x=1, \underline{\omega})] = 12 \times 0.26 + 12 \times 0.4 + 12 \times 0.34 = 12$$

$$F(x=2) = E_{\underline{\omega}}[F(x=2, \underline{\omega})] = -9 \times 0.26 + 24 \times 0.4 + 24 \times 0.34 = 15.42$$

$$F(x=3) = E_{\underline{\omega}}[F(x=3, \underline{\omega})] = -41 \times 0.26 + 14 \times 0.4 + 36 \times 0.34 = 7.17$$

$$F(x=4) = E_{\underline{\omega}}[F(x=4, \underline{\omega})] = -73 \times 0.26 - 18 \times 0.4 + 37 \times 0.34 = -13.6$$

x	$\omega_1 = 50$	$\omega_2 = 100$	$\omega_3 = 150$	$F(x)$
	$p_1 = 0.26$	$p_2 = 0.40$	$p_3 = 0.34$	
$x=1$	12	12	12	12
$x=2$	-9	24	24	15.42
$x=3$	-41	14	36	7.17
$x=4$	-73	-18	37	-13.6

Podjmowanie decyzji w warunkach niepewności

Modyfikacja funkcji celu - ostrożny sprzedawca - „tłumi” zyski,
„wyołbrzymia” straty

$$\bar{F}(x, \underline{\omega}) = \begin{cases} 10 \times \sqrt{F(x, \underline{\omega})} & \text{if } F(x, \underline{\omega}) \geq 0 \\ -\frac{(F(x, \underline{\omega}))^2}{10} & \text{if } F(x, \underline{\omega}) < 0 \end{cases}$$

x	$\omega_1 = 50$	$\omega_2 = 100$	$\omega_3 = 150$	$F(x)$
	$p_1 = 0.26$	$p_2 = 0.40$	$p_3 = 0.34$	
$x=1$	34.64	34.64	34.64	34.64
$x=2$	-8.1	48.99	48.99	34.15
$x=3$	-168.1	37.42	60	-8.34
$x=4$	-532.9	-32.4	60.83	-130.83

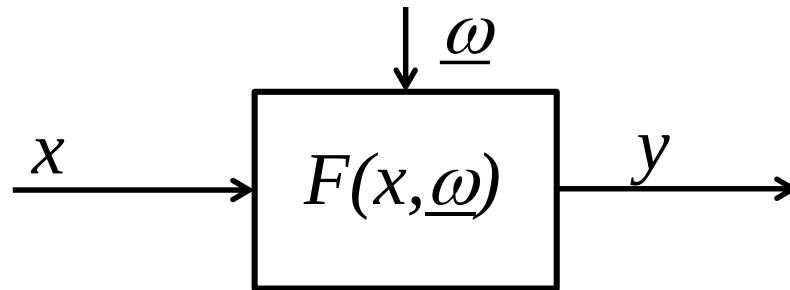
Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności

Modyfikacja funkcji celu - sprzedawca „ryzykant” - „wyolbrzymia” zyski,
„tłumi” straty

$$\bar{F}(x, \underline{\omega}) = \begin{cases} \frac{(F(x, \underline{\omega}))^2}{10} & \text{if } F(x, \underline{\omega}) \geq 0 \\ -10 \times \sqrt{-F(x, \underline{\omega})} & \text{if } F(x, \underline{\omega}) < 0 \end{cases}$$

x	$\omega_1 = 50$	$\omega_2 = 100$	$\omega_3 = 150$	$F(x)$
	$p_1 = 0.26$	$p_2 = 0.40$	$p_3 = 0.34$	
$x=1$	14.4	14.4	14.4	14.4
$x=2$	-30	57.6	57.6	34.82
$x=3$	-64.03	19.6	129.6	35.26
$x=4$	-85.44	-42.43	136.9	7.36

Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności



$$F(x) = E_{\underline{\omega}}[F(x, \underline{\omega})]$$

$$\mathcal{D}_x = E_{\underline{\omega}}[\mathcal{D}_x(\underline{\omega})] =$$

$$= \left\{ x \in \mathcal{R}^S; E_{\underline{\omega}}[\varphi_l(x, \underline{\omega})] = 0, l = 1, \dots, L, E_{\underline{\omega}}[\psi_m(x, \underline{\omega})] \leq 0, m = 1, \dots, M \right\}$$

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in D_x} F(x)$$

Gry w podejmowaniu decyzji

∞ ∞

Gra z naturą

Podjmowanie decyzji w warunkach niepewności – gra z naturą

Rolnik rozpatruje możliwość uprawy 5. rodzajów zbóż. Wielkość plonów każdego zboża zależy od warunków pogodowych. Pod względem wilgotności rok może być suchy, normalny lub deszczowy. Przewidywane plony w zależności od warunków pogodowych przedstawia tabela.

Rodzaj uprawy	Warunki pogodowe		
	susze	normalne	deszcze
1	8	10	12
2	10	11	7
3	9	13	8
4	11	10	6
5	10	10	9

Podjmowanie decyzji w warunkach niepewności – gra z naturą

Reguła min – max.

Analizując kolejne wiersze macierzy znajdujemy maksymalną korzyść, którą możemy uzyskać dla kolejnych stanów natury. Wybieramy tę decyzję, dla której maksymalna korzyść jest najmniejsza. W przypadku niejednoznaczności rekomendujemy wszystkie decyzje, dla których powyższy warunek jest spełniony.

Rodzaj uprawy	Warunki pogodowe			max
	susze	normalne	deszcze	
1	8	10	12	12
2	10	11	7	11
3	9	13	8	13
4	11	10	6	11
5	10	10	9	10

← min

Podjmowanie decyzji w warunkach niepewności – gra z naturą

Reguła WALDA (max – min).

Analizując kolejne wiersze macierzy znajdujemy minimalną korzyść, którą możemy uzyskać dla kolejnych stanów natury. Wybieramy tę decyzję, dla której minimalna korzyść jest największa. W przypadku niejednoznaczności rekomendujemy wszystkie decyzje, dla których powyższy warunek jest spełniony.

Rodzaj uprawy	Warunki pogodowe			min
	susze	normalne	deszcze	
1	8	10	12	8
2	10	11	7	7
3	9	13	8	8
4	11	10	6	6
5	10	10	9	9

← max

Podjmowanie decyzji w warunkach niepewności – gra z naturą

Reguła max – max.

Analizując kolejne wiersze macierzy znajdujemy maksymalną korzyść, którą możemy uzyskać dla kolejnych stanów natury. Wybieramy tę decyzję, dla której maksymalna korzyść jest największa. W przypadku niejednoznaczności rekomendujemy wszystkie decyzje, dla których powyższy warunek jest spełniony.

Rodzaj uprawy	Warunki pogodowe			max
	susze	normalne	deszcze	
1	8	10	12	12
2	10	11	7	11
3	9	13	8	13
4	11	10	6	11
5	10	10	9	10

← max

Podjmowanie decyzji w warunkach niepewności – gra z naturą

a_i - minimalna korzyść dla i – tego wiersza

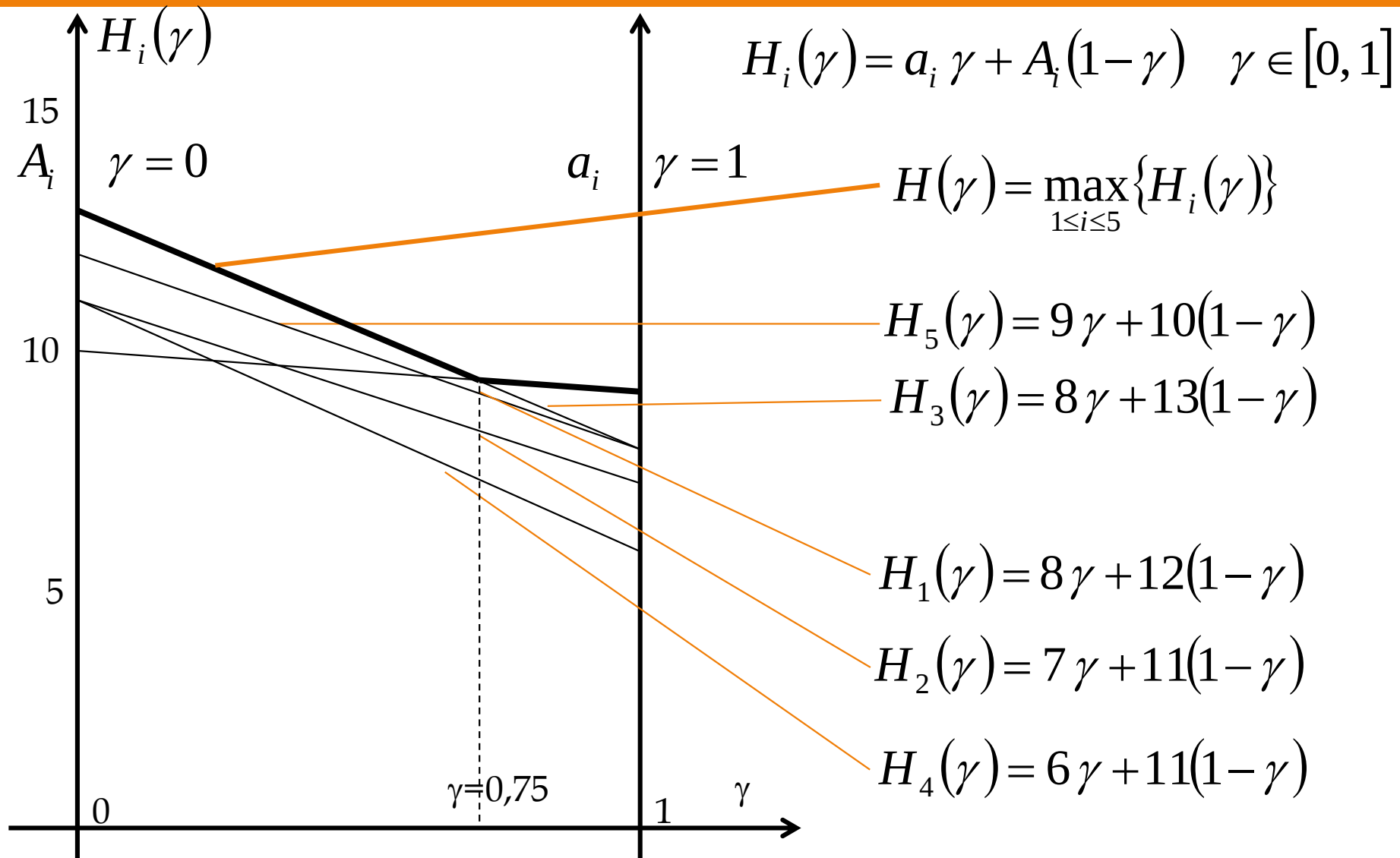
A_i - maksymalna korzyść dla i – tego wiersza

$$H_i(\gamma) = a_i \gamma + A_i(1 - \gamma) \quad \gamma \in [0, 1]$$

Reguła Hurwicza. Analizując kolejne wiersze macierzy znajdujemy minimalną i maksymalną korzyść, tj.: wartości a_i oraz A_i , a także wartość funkcji $H_i(\gamma)$ dla ustalonego γ . Wybieramy tę decyzję, dla której wartość funkcji $H_i(\gamma)$ jest największa. W przypadku niejednoznaczności rekomendujemy wszystkie decyzje, dla których powyższy warunek jest spełniony.

Rodzaj uprawy	Warunki pogodowe			a min	A max	$H(\gamma)$ $\gamma = 0.5$
	susze	normalne	deszcze			
1	8	10	12	8	12	10
2	10	11	7	7	11	9
3	9	13	8	8	13	10.5 ← max
4	11	10	6	6	11	8.5
5	10	10	9	γ 9	10	9.5

Podjęmowanie decyzji w warunkach niepewności – gra z naturą



Celem rozbudowy przedsiębiorstwo może zainwestować w jeden z czterech obiektów. W tabeli podano koszty inwestycji w zależności od stanu sytuacji rynkowej (stan natury I, II, III, IV) przy zakładanych zyskach o tej samej wysokości dla każdego obiektu. Wybrać obiekt do inwestycji stosując kryterium Hurwicza przyjmując współczynnik ostrożności $\gamma=0.2$.

Wyroby	Koszty w zależności od stanu natury						
	I	II	III	IV			$\gamma=0.5$
Obiekt 1.	5	15	10	0	0	15	7.5
Obiekt 2.	10	10	15	30	10	30	20
Obiekt 3.	40	0	50	20	0	50	25
Obiekt 4.	60	0	20	10	0	60	30

Podjmowanie decyzji w warunkach niepewności – gra z naturą

Reguła Laplace'a.

Analizując kolejne wiersze macierzy znajdujemy oczekiwaną korzyść przyjmując, że kolejne stany natury są równie prawdopodobne. Wybieramy tę decyzję, dla której oczekiwana korzyść jest największa. W przypadku niejednoznaczności rekomendujemy wszystkie decyzje, dla których powyższy warunek jest spełniony.

Rodzaj uprawy	Warunki pogodowe			Oczekiwana korzyść	
	susze	normalne	deszcze		
1	8	10	12	30/3	← max
2	10	11	7	28/3	
3	9	13	8	30/3	← max
4	11	10	6	27/3	
5	10	10	9	19/3	

Gry w podejmowaniu decyzji



Gra dwuosobowa o sumie zerowej

Gry w podejmowaniu decyzji

Gra dwuosobowa o sumie zerowej

Macierz wypłat dla gracza A:

A \ B	B					
	B_1	B_2	...	B_m	...	B_M
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	...	a_{1M}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	...	a_{2M}
...	...	...	...	...	...	...
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}	...	a_{nM}
...	...	...	...	...	...	...
A_N	a_{N1}	a_{N2}	...	a_{Nm}	...	a_{NM}

Gracz A maksymalizuje zyski

Macierz wypłat dla gracza B:

A \ B	B					
	B_1	B_2	...	B_m	...	B_M
A_1	$-a_{11}$	$-a_{12}$	...	$-a_{1m}$	...	$-a_{1M}$
A_2	$-a_{21}$	$-a_{22}$	...	$-a_{2m}$	...	$-a_{2M}$
...	...	...	...	...	...	...
A_n	$-a_{n1}$	$-a_{n2}$	...	$-a_{nm}$	...	$-a_{nM}$
...	...	...	...	...	...	...
A_N	$-a_{N1}$	$-a_{N2}$	...	$-a_{Nm}$	...	$-a_{NM}$

Gracz B minimalizuje straty

Zwyczajowo podaje się macierz wypłat dla gracza A

Przykład

Dwaj kandydaci A i B ubiegają się o mandat poselski w okręgu wyborczym. Mają podjąć decyzję o prowadzeniu kampanii wyborczej w ostatni weekend przed wyborami. Każdy z nich może spędzić po jednym dniu w miejscowości M_1 lub M_2 . Rozważają oni (niezależnie od siebie) trzy możliwe strategie postępowania:

A_1, B_1 – spędzić po jednym dniu miejscowości M_1 i M_2 ,

A_2, B_2 – spędzić obydwa dni w M_1 ,

A_3, B_3 – spędzić obydwa dni w M_2 .

Jeżeli kandydat A wybierze strategię A_1 , a kandydat B – odpowiednio strategię B_1 , B_2 lub B_3 , to kandydat A może się spodziewać przyrostu głosów o 1%, 2% lub 4%.

Jeżeli kandydat A wybierze strategię A_2 , a kandydat B – odpowiednio strategię B_1 , B_2 lub B_3 , to kandydat A może się spodziewać przyrostu głosów o 1%, 0% lub 5%.

Jeżeli kandydat A wybierze strategię A_3 , a kandydat B – odpowiednio strategię B_1 , B_2 lub B_3 , to kandydat A może się spodziewać przyrostu głosów o 0%, 1% lub -1%.

Przykład

Gra dwuosobowa o sumie zerowej

Macierz wypłat dla gracza A:

A \ B				
		B_1	B_2	B_3
	A_1	1	2	4
	A_2	1	0	5
	A_3	0	1	-1

Macierz wypłat dla gracza B:

A \ B				
		B_1	B_2	B_3
	A_1	-1	-2	-4
	A_2	-1	0	-5
	A_3	0	-1	1

Gracz A uzyskuje korzyści kosztem gracza B i na odwrót, stąd suma macierzy wypłat gracza A i B jest macierzą zerową.

Gry w podejmowaniu decyzji

∞ Typowe podejście do rozwiązywania gier

- Wyznaczenie punktu siodłowego
- Usunięcie strategii zdominowanych
- Wyznaczenie strategii mieszanej dla:
 - $N=2$ i $M=2$
 - $N>2$ i $M>2$

Gry w podejmowaniu decyzji

Gra dwuosobowa o sumie zerowej

Punkt siodłowy: $\max_{1 \leq n \leq N} \min_{1 \leq m \leq M} a_{nm} = \min_{1 \leq n \leq N} \max_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

A \ B		B						min
		B_1	B_2	...	B_m	...	B_M	
	A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	...	a_{1M}	
	A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	...	a_{2M}	
	...	...	...	...	...	...	...	
	A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}	...	a_{nM}	
	...	...	...	...	...	...	...	
	A_N	a_{N1}	a_{N2}	...	a_{Nm}	...	a_{NM}	
max								

← $\max_{1 \leq n \leq N} \min_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

↑ $\min_{1 \leq n \leq N} \max_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

Przykład

Gra dwuosobowa o sumie zerowej

Punkt siodłowy: $\max_{1 \leq n \leq N} \min_{1 \leq m \leq M} a_{nm} = \min_{1 \leq n \leq N} \max_{1 \leq m \leq M} a_{nm} = 190$

A \ B		B					min
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
	A_1	180	150	230	170	150	150
	A_2	200	210	220	150	190	150
	A_3	210	230	190	190	200	190
	A_4	150	220	170	180	220	150
	A_5	210	200	160	150	210	150
max		210	230	230	190	220	

← $\max_{1 \leq n \leq N} \min_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

↑ $\min_{1 \leq n \leq N} \max_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

Gry w podejmowaniu decyzji

Strategia zdominowana i dominująca

Gracz A dysponuje strategiami: $A_1, A_2, \dots, A_N$

Strategia $A_{n'}$ jest zdominowana przez strategię $A_{n''}$ (dominującą) jeżeli $\forall m = 1, 2, \dots, M \quad a_{n'm} \leq a_{n''m}$

Gracz B dysponuje strategiami: $B_1, B_2, \dots, B_M$

Strategia $B_{m'}$ jest zdominowana przez strategię $B_{m''}$ (dominującą) jeżeli $\forall n = 1, 2, \dots, N \quad a_{nm'} \geq a_{nm''}$

Przykład

Usuwanie strategii zdominowanych

Krok 1.

A B					
		B_1	B_2	B_3	
	A_1	1	2	4	← Strategia dominująca
	A_2	1	0	5	
	A_3	0	1	-1	← Strategia zdominowana

Krok 2.

A B					
		B_1	B_2	B_3	
	A_1	1	2	4	
	A_2	1	0	5	

↑
↑ - Strategia dominująca

↑ - Strategia zdominowana

Przykład

Usuwanie strategii zdominowanych

Krok 3.

A \ B				
		B_1	B_2	
A_1	1	2	← Strategia dominująca	
A_2	1	0	← Strategia zdominowana	

Krok 4.

A \ B				
		B_1	B_2	
A_1	1	2		

Wynik gry →

↑ - Strategia zdominowana
↑ - Strategia dominująca

Gry w podejmowaniu decyzji

Gra dwuosobowa o sumie zerowej

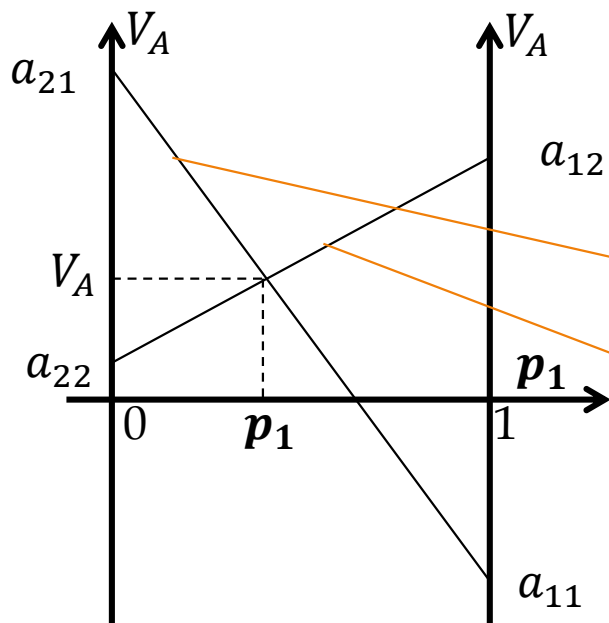
Strategie mieszane: $\max_{1 \leq n \leq N} \min_{1 \leq m \leq M} a_{nm} \neq \min_{1 \leq n \leq N} \max_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

A \ B		q_1	q_2	...	q_m	...	q_M
		B_1	B_2	...	B_m	...	B_M
p_1	A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	...	a_{1M}
p_2	A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	...	a_{2M}
...	...	...	...	...	...	...	...
p_n	A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}	...	a_{nM}
...	...	...	...	...	...	...	...
p_N	A_N	a_{N1}	a_{N2}	...	a_{Nm}	...	a_{NM}

Gry w podejmowaniu decyzji

$$N = M = 2$$

A ↘ B		q_1	q_2
		B_1	B_2
p_1	A_1	a_{11}	a_{12}
p_2	A_2	a_{21}	a_{22}



Równania dla gracza A

$$p_1 a_{11} + p_2 a_{21} = V_A / B_1$$

$$p_1 a_{12} + p_2 a_{22} = V_A / B_2$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$p_2 = 1 - p_1$$

$$p_1 a_{11} + (1 - p_1) a_{21} = V_A / B_1$$

$$p_1 a_{12} + (1 - p_1) a_{22} = V_A / B_2$$

Gry w podejmowaniu decyzji

$$N = M = 2$$

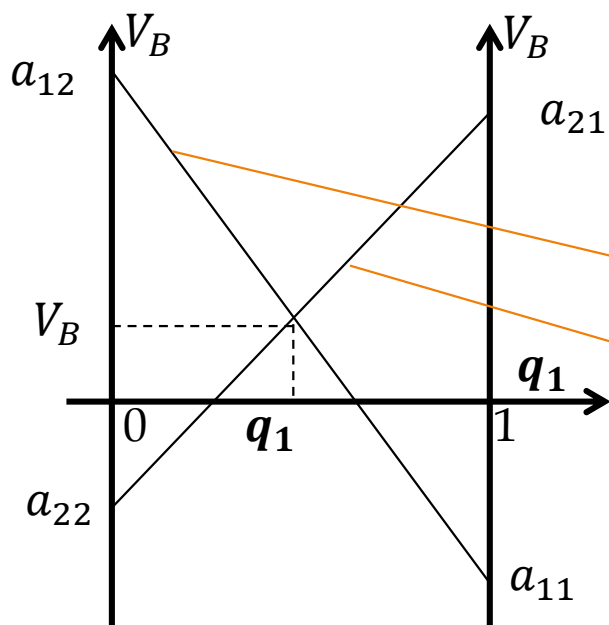
A \ B q_1 q_2			
		B_1	B_2
p_1	A_1	a_{11}	a_{12}
p_2	A_2	a_{21}	a_{22}

Równania dla gracza B

$$q_1 a_{11} + q_2 a_{12} = V_B / A_1$$

$$q_1 a_{21} + q_2 a_{22} = V_B / A_2$$

$$q_1 + q_2 = 1$$



$$q_2 = 1 - q_1$$

$$q_1 a_{11} + (1 - q_1) a_{12} = V_B / A_1$$

$$q_1 a_{21} + (1 - q_1) a_{22} = V_B / A_2$$

Przykład

Gra dwuosobowa o sumie zerowej

Punkt siodłowy: $\max_{1 \leq n \leq N} \min_{1 \leq m \leq M} a_{nm} \neq \min_{1 \leq n \leq N} \max_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

A \ B					
		B_1	B_2	B_3	min
	A_1	3	-3	7	-3
	A_2	-1	5	2	-1
	A_3	0	-4	4	-4
max		3	5	7	

← $\max_{1 \leq n \leq N} \min_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

↑ $\min_{1 \leq n \leq N} \max_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

Brak punktu siodłowego

A \ B		q_1	q_2	q_3	
		B_1	B_2	B_3	
p_1	A_1	3	-3	7	← Strategia dominująca
p_2	A_2	-1	5	2	
p_3	A_3	0	-4	4	← Strategia zdominowana

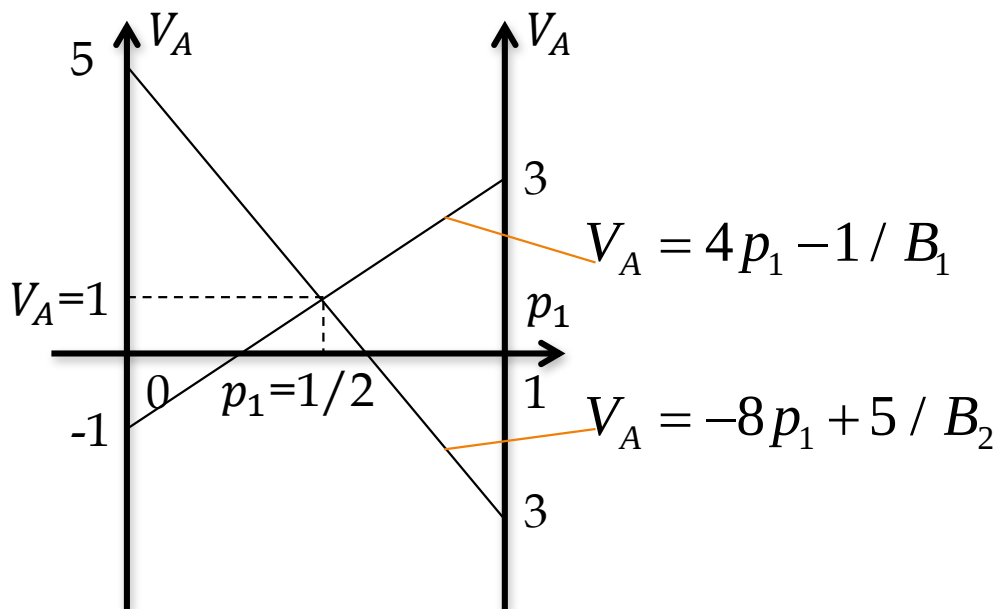
↑
 ↑ - Strategia dominująca

↑ - Strategia zdominowana

Przykład

$$N = M = 2$$

A B		q_1	q_2
		B_1	B_2
p_1	A_1	3	-3
p_2	A_2	-1	5



Równania dla gracza A

$$3p_1 - p_2 = V_A / B_1$$

$$-3p_1 + 5p_2 = V_A / B_2$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$p_2 = 1 - p_1$$

$$3p_1 - (1 - p_1) = V_A / B_1$$

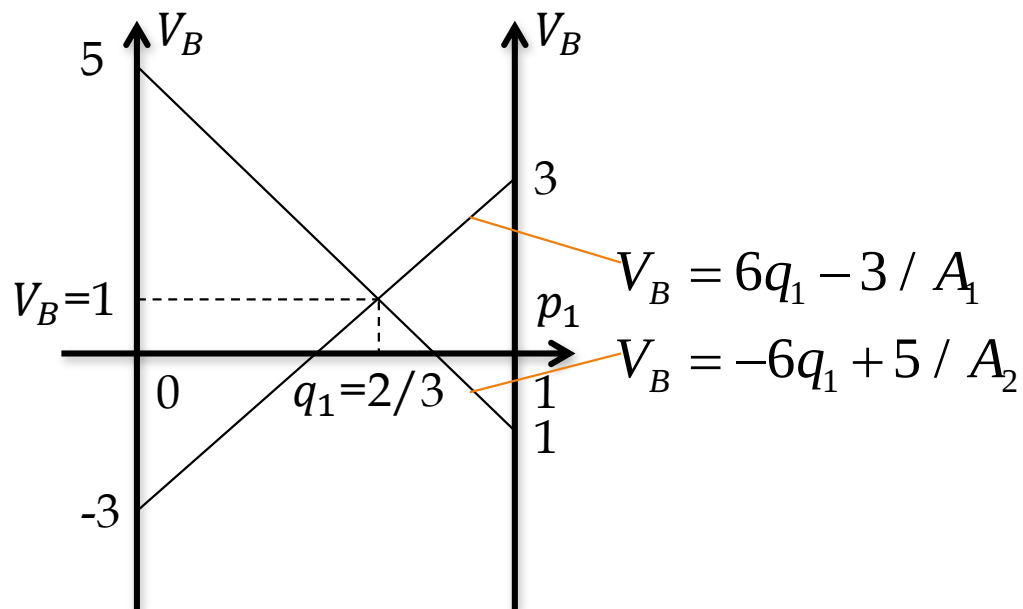
$$-3p_1 + 5(1 - p_1) = V_A / B_2$$

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{2}$$

Przykład

$$N = M = 2$$

A B		q_1	q_2
		B_1	B_2
p_1	A_1	3	-3
p_2	A_2	-1	5



Równania dla gracza B

$$3q_1 - 3q_2 = V_B / A_1$$

$$-q_1 + 5q_2 = V_B / A_2$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

$$q_2 = 1 - q_1$$

$$3q_1 - 3(1 - q_1) = V_B / A_1$$

$$-q_1 + 5(1 - q_1) = V_B / A_2$$

$$q_1 = \frac{2}{3}, \quad q_2 = \frac{1}{3}$$

Gry w podejmowaniu decyzji

Gra dwuosobowa o sumie zerowej

Strategie mieszane $N > 2, M > 2$:

A \ B		q_1	q_2		q_m		q_M
		B_1	B_2	...	B_m	...	B_M
p_1	A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	...	a_{1M}
p_2	A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	...	a_{2M}
...	...	...	...	...	...	...	...
p_n	A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}	...	a_{nM}
...	...	...	...	...	...	...	...
p_N	A_N	a_{N1}	a_{N2}	...	a_{Nm}	...	a_{NM}

W tym przypadku rozwiązanie gry sprowadza się do rozwiązania zadania programowania liniowego

Gry w podejmowaniu decyzji

Zadanie dla gracza A

$$p_1 a_{1m} + p_2 a_{2m} + \dots + p_N a_{Nm} \geq V_A / B_m \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$$

$$p_n \geq 0 \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$/V_A$

$$\frac{p_1}{V_A} a_{1m} + \frac{p_2}{V_A} a_{2m} + \dots + \frac{p_N}{V_A} a_{Nm} \geq 1 / B_m \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$\frac{p_1}{V_A} + \frac{p_2}{V_A} + \dots + \frac{p_N}{V_A} = \frac{1}{V_A}$$

$$\frac{p_n}{V_A} \geq 0 \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Niech: $x_n = \frac{p_n}{V_A} \quad n = 1, 2, \dots, N$

Gry w podejmowaniu decyzji

Zadanie dla gracza A

$$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{Nm}x_N \geq 1 / B_m \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_N = \frac{1}{V_A} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Zatem należy minimalizować wyrażenie} \\ \text{Gracz A maksymalizuje zysk} \end{array} \right.$$

$$x_n \geq 0 \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Ostatecznie zadanie dla gracza A

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_N} (x_1 + x_2 + \cdots + x_N) = V_{Amin}$$

Przy ograniczeniach:

$$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{Nm}x_N \geq 1 \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$x_n \geq 0 \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$p_n = x_n V_{Amin}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Gry w podejmowaniu decyzji

Zadanie dla gracza B

$$q_1 a_{n1} + q_2 a_{n2} + \dots + q_M a_{nM} \leq V_B / A_n \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$q_1 + q_2 + \dots + q_M = 1$$

$$q_m \geq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M$$

| $/V_B$

$$\frac{q_1}{V_B} a_{n1} + \frac{q_2}{V_B} a_{n2} + \dots + \frac{q_M}{V_B} a_{nM} \leq 1 / A_n \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$\frac{q_1}{V_B} + \frac{q_2}{V_B} + \dots + \frac{q_M}{V_B} = \frac{1}{V_B}$$

$$\frac{q_m}{V_B} \geq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Niech: $y_m = \frac{q_m}{V_B} \quad m = 1, 2, \dots, M$

Gry w podejmowaniu decyzji

Zadanie dla gracza B

$$a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nM}y_M \leq 1 / A_n \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_M = \frac{1}{V_B} \quad \leftarrow \text{Zatem należy maksymalizować wyrażenie}$$

$$y_m \geq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M \quad \text{Gracz B minimalizuje straty}$$

Ostatecznie zadanie dla gracza B

$$\max_{y_1, y_2, \dots, y_M} (y_1 + y_2 + \cdots + y_M) = V_{B\max}$$

Przy ograniczeniach:

$$a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nM}y_M \leq 1 \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$y_m \geq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$q_m = y_m V_{B\max}, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Przykład

Gra dwuosobowa o sumie zerowej

Punkt siodłowy: $\max_{1 \leq n \leq N} \min_{1 \leq m \leq M} a_{nm} \neq \min_{1 \leq n \leq N} \max_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

A B					
		B_1	B_2	B_3	min
	A_1	5	0	1	0
	A_2	2	4	3	2
max		5	4	3	

← $\max_{1 \leq n \leq N} \min_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$



$\min_{1 \leq n \leq N} \max_{1 \leq m \leq M} a_{nm}$

Przykład

A \ B		q_1	q_2	q_3
		B_1	B_2	B_3
p_1	A_1	5	0	1
p_2	A_2	2	4	3

Zadanie dla gracza A

$$\min_{x_1, x_2} (x_1 + x_2)$$

Przy ograniczeniach:

$$5x_1 + 2x_2 \geq 1$$

$$0x_1 + 4x_2 \geq 1$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Zadanie dla gracza B

$$\max_{y_1, y_2, y_3} (y_1 + y_2 + y_3)$$

Przy ograniczeniach:

$$5y_1 + 0y_2 + y_3 \leq 1$$

$$2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \leq 1$$

$$y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \quad y_3 \geq 0$$

Dziękuję za uwagę

