

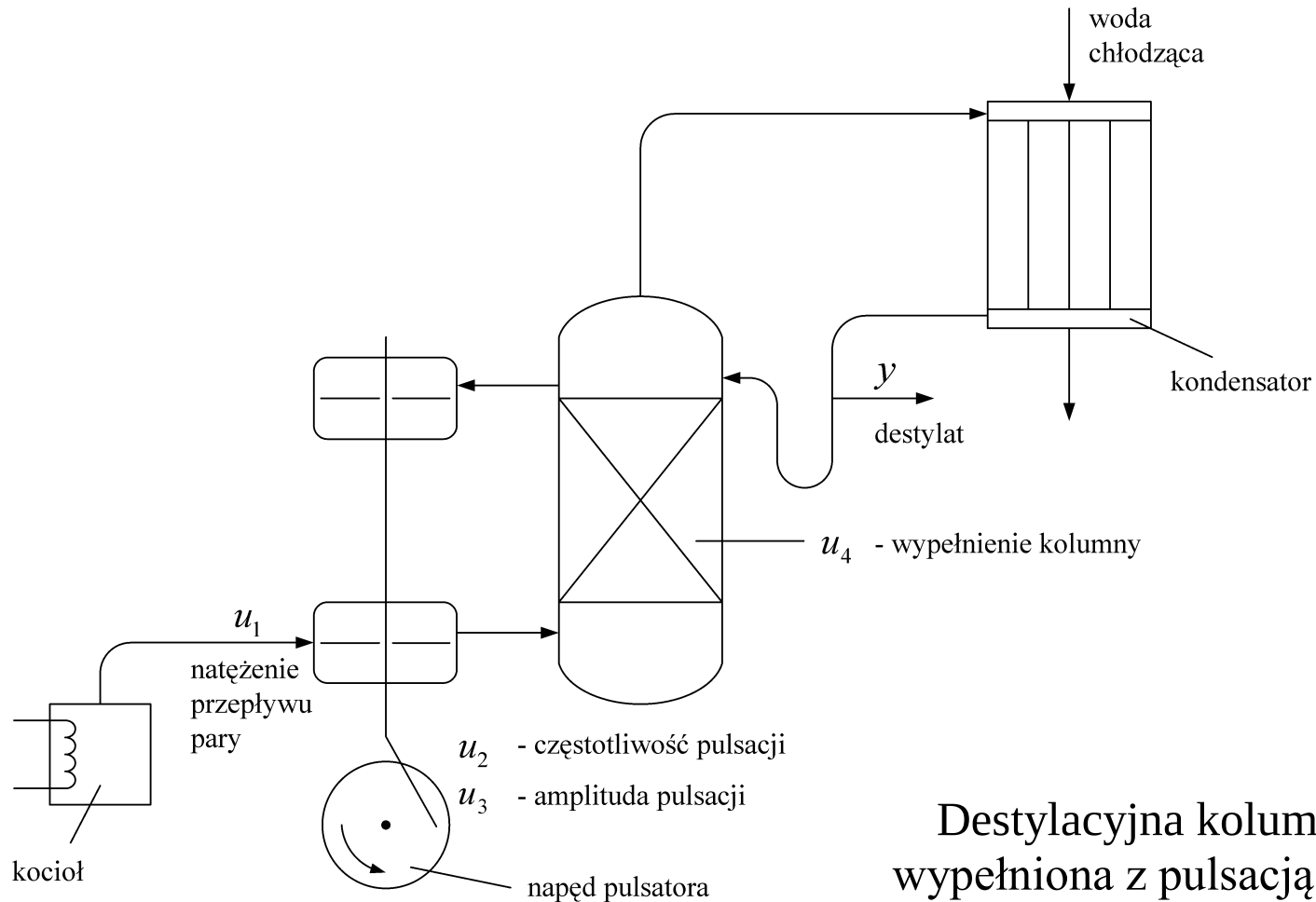
Modele systemów dynamicznych

[modeleisystemy.pl/dla studenta](http://modeleisystemy.pl/dla-studenta)



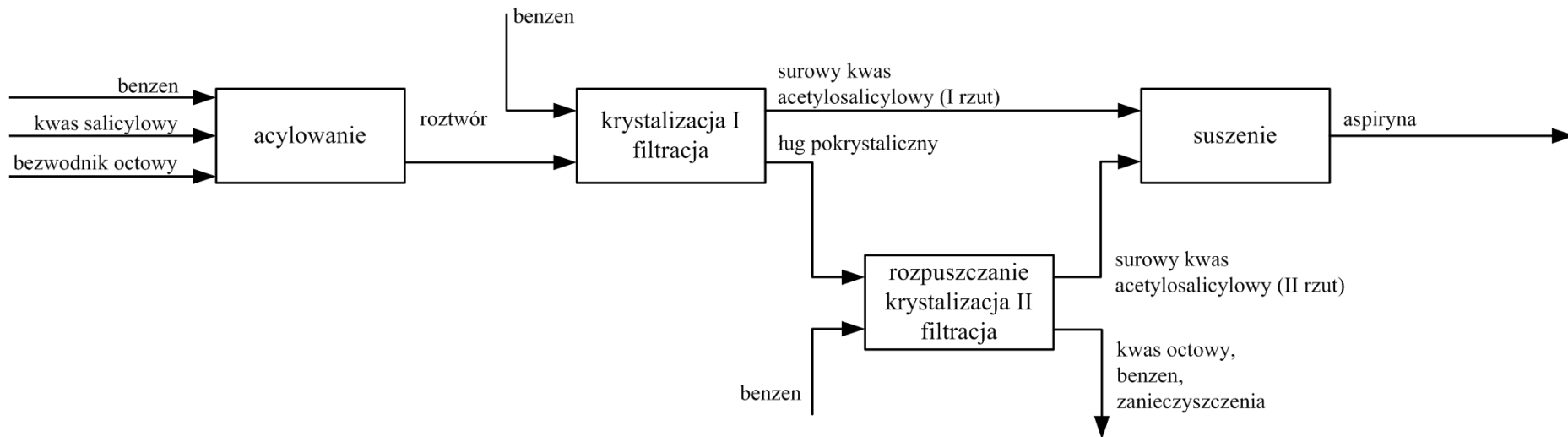
Wykład 8. Wstęp. Systemy złożone

Przykład systemu



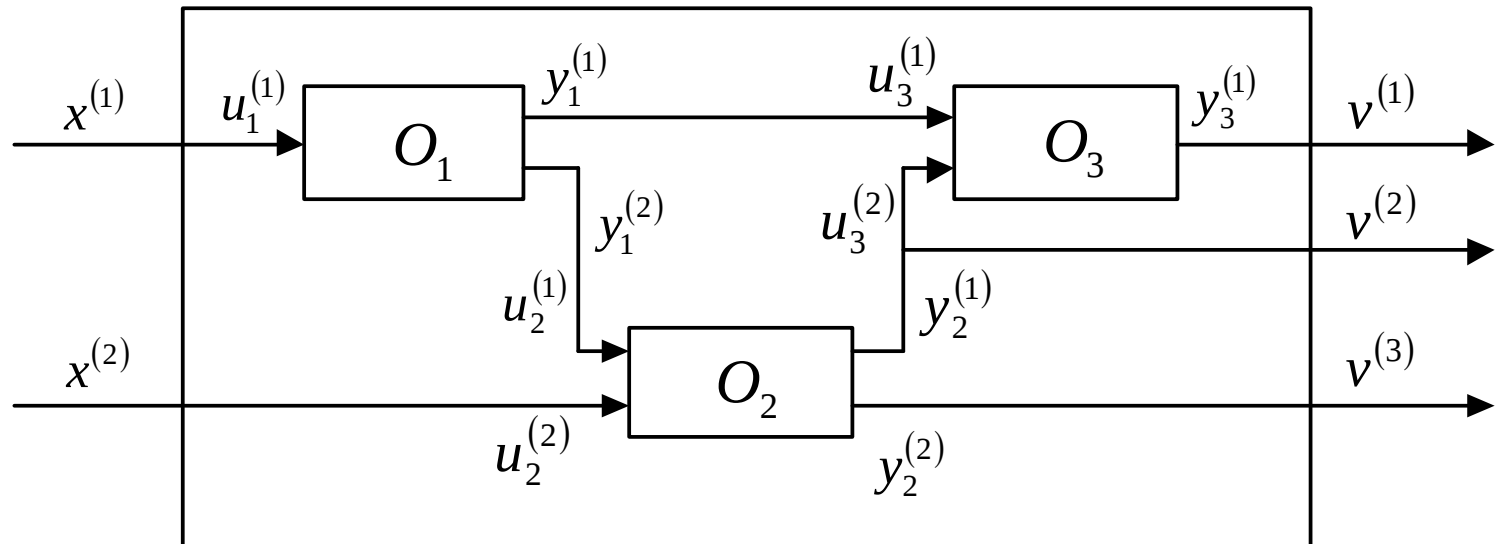
Destylacyjna kolumna
wypełniona z pulsacją fazy
parowej

Przykład sytemu



System produkcji aspiryny

Opis systemu złożonego



Przykład systemu złożonego

Opis systemu złożonego

Wejściowo - wyjściowy system złożony z M podsystemami $O_1, O_2, \dots, O_M$.

$$Y_m(s) = K_m(s)U_m(s) \quad (\text{Uwaga! W tym miejscu mogą wystąpić różne typowe opisy})$$

Charakterystyka m -tego podsystemu, z wejściem u_m i wyjściem y_m , $K_m(s)$ jest znaną transmitancją

$$u_m = \begin{bmatrix} u_m^{(1)} \\ u_m^{(2)} \\ \vdots \\ u_m^{(S_m)} \end{bmatrix} \in \mathcal{U}_m \subseteq \mathcal{R}^{S_m}, \quad y_m = \begin{bmatrix} y_m^{(1)} \\ y_m^{(2)} \\ \vdots \\ y_m^{(L_m)} \end{bmatrix} \in \mathcal{Y}_m \subseteq \mathcal{R}^{L_m}, \quad m=1, 2, \dots, M.$$

gdzie: S_m oraz L_m są odpowiednio wymiarami przestrzeni wejść wyjść,

Opis systemu złożonego

Niech u, y , oznacza odpowiednio wektory wszystkich wejść i wyjść systemu złożonego:

$$u = \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ \vdots \\ u^{(S)} \end{bmatrix} \stackrel{df}{=} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(L)} \end{bmatrix} \stackrel{df}{=} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(\tilde{S})} \end{bmatrix}$$

Gdzie, wektor wszystkich wejść systemu: $u \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \cdots \times \mathcal{U}_M \subseteq \mathcal{R}^S$, $S = \sum_{m=1}^M S_m$,

wektor wszystkich wyjść systemu: $y \in \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \cdots \times \mathcal{Y}_M \subseteq \mathcal{R}^L$, $L = \sum_{m=1}^M L_m$,

oraz x jest $\tilde{S}$ - wymiarowym wejść zewnętrznych $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^{\tilde{S}}$.

Opis systemu złożonego

Struktura system jest dana zależnością:

$$u = Ay + Bx ,$$

gdzie: A jest $S \times L$ oraz B jest $S \times \tilde{S}$ zero – jedynkową macierzą.
Macierz A definiuje połączenia pomiędzy elementami system, tj.:

$$A = [a_{sl}] \Big|_{\substack{s=1,2,\dots,S \\ l=1,2,\dots,L}} , \quad a_{sl} = \begin{cases} 1 & \text{if } u^{(s)} = y^{(l)} \\ 0 & \text{if } u^{(s)} \neq y^{(l)} \end{cases} ,$$

A macierz B wskazuje wejścia zewnętrzne, tj.:

$$B = [b_{s\tilde{s}}] \Big|_{\substack{s=1,2,\dots,S \\ \tilde{s}=1,2,\dots,\tilde{S}}} , \quad b_{s\tilde{s}} = \begin{cases} 1 & \text{if } u^{(s)} = x^{(\tilde{s})} \\ 0 & \text{if } u^{(s)} \neq x^{(\tilde{s})} \end{cases} .$$

Opis systemu złożonego

Wyjścia zewnętrzne systemu: $v = \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ \vdots \\ v^{(\tilde{L})} \end{bmatrix}.$

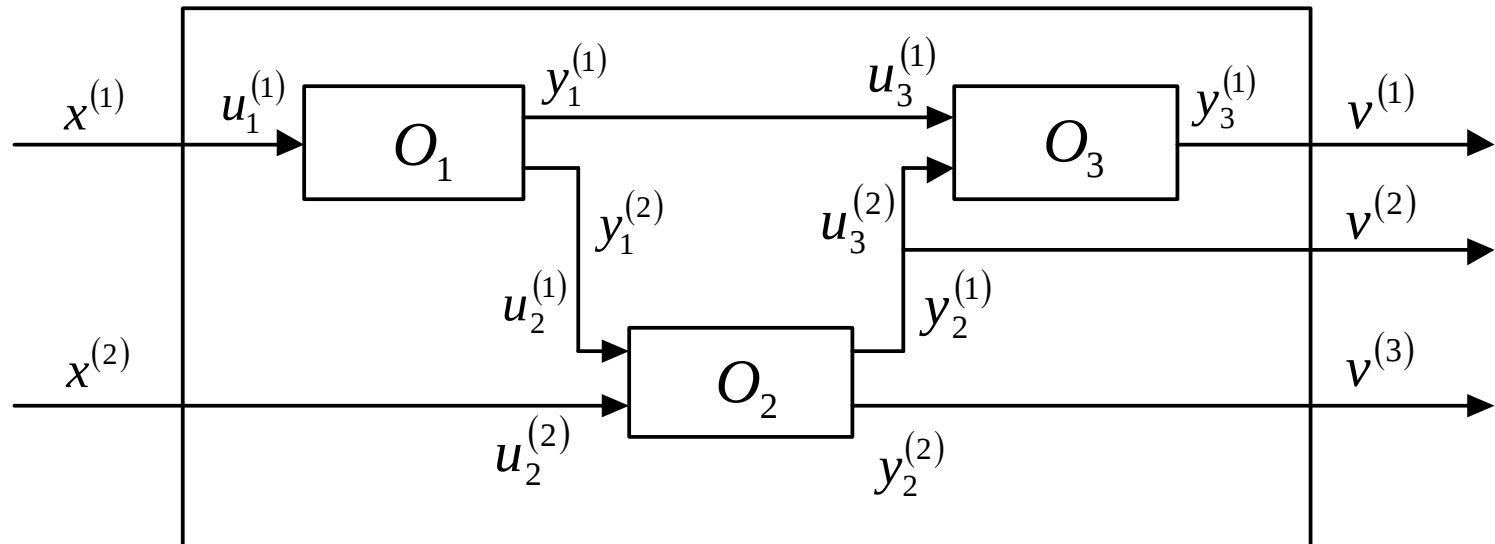
$\tilde{L}$ wymiarowy wektor v , jest wektorem wybranych wyjść spośród wszystkich wyjść i jest określony przez $\tilde{L} \times L$ wymiarową macierz C ,
 $v = Cy$,

gdzie

$$C = [c_{\tilde{l}l}]_{\substack{\tilde{l}=1,2,\dots,\tilde{L} \\ l=1,2,\dots,L}}, \quad c_{\tilde{l}l} = \begin{cases} 1 & \text{if } v^{(\tilde{l})} = y^{(l)} \\ 0 & \text{if } v^{(\tilde{l})} \neq y^{(l)} \end{cases}.$$

Wektor wyjść zewnętrznych: $v \in \mathcal{V} = \{v : \forall y \in \mathcal{Y}, v = Cy\} \subseteq \mathcal{R}^{\tilde{L}}.$

Opis systemu złożonego



Przykład systemu złożonego

Opis systemu złożonego

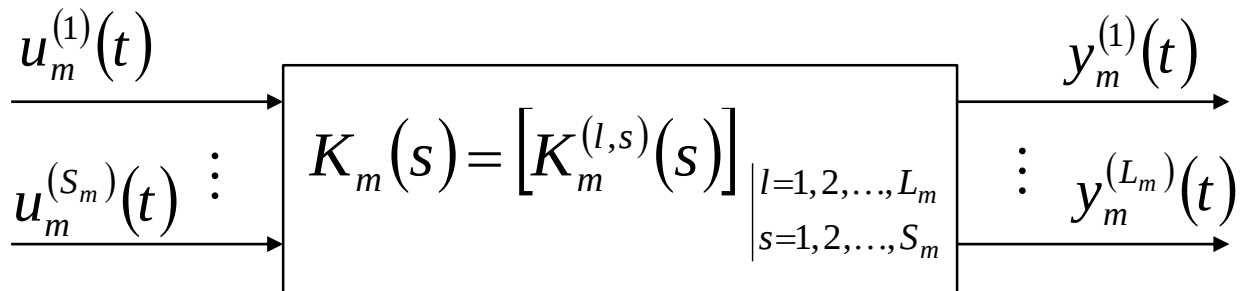
$$u = Ay + Bx$$

$$\begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(1)} \\ u_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_1^{(2)} \\ y_2^{(1)} \\ y_2^{(2)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$v = Cy$$

$$\begin{bmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ v^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_1^{(2)} \\ y_2^{(1)} \\ y_2^{(2)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Opis systemu złożonego



Opis m – tego elementu ma postać:

$$Y_m(s) = K_m(s)U_m(s) \quad m = 1, 2, \dots, M$$

gdzie: $K_m(s) = [K_m^{(l,s)}(s)]_{\substack{l=1,2,\dots,L_m \\ s=1,2,\dots,S_m}}$ jest macierzą transmitancji o wymiarach $L_m \times S_m$

$$K_m^{(l,s)}(s) = \frac{Y_m^l(s)}{U_m^s(s)}, \quad l = 1, 2, \dots, L_m, \quad s = 1, 2, \dots, S_m$$

Opis systemu złożonego

Wektor wszystkich wyjść $Y(s)$ zależy w następujący sposób od wszystkich wejść $U(s)$:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_M(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1(s) & O & \cdots & O \\ O & K_2(s) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & K_M(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_M(s) \end{bmatrix}$$

Przyjmując oznaczenia:

$$K(s) \stackrel{df}{=} \begin{bmatrix} K_1(s) & O & \cdots & O \\ O & K_2(s) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & K_M(s) \end{bmatrix}, \quad Y(s) \stackrel{df}{=} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_M(s) \end{bmatrix}, \quad U(s) \stackrel{df}{=} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_M(s) \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy:

$$Y(s) = K(s)U(s)$$

Opis systemu złożonego

Uwzględniając równania opisujące strukturę systemu otrzymujemy układ równań:

$$Y(s) = K(s)U(s) \quad (1), \quad U(s) = AY(s) + BX(s) \quad (2), \quad V(s) = CY(s) \quad (3)$$

Wstawiając (2) do (1) otrzymujemy:

$$Y(s) = K(s)U(s) = K(s)(AY(s) + BX(s))$$

$$Y(s) - K(s)AY(s) = [I - K(s)A]Y(s) = K(s)BX(s)$$

Stąd:

$$Y(s) = [I - K(s)A]^{-1} K(s)BX(s)$$

Uwzględniając (3) otrzymujemy zależność pomiędzy wejściem zewnętrznym $X(s)$ a wyjściem zewnętrznym $V(s)$:

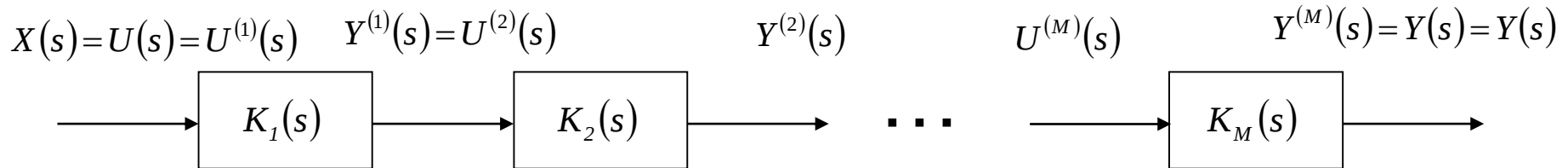
$$V(s) = CY(s) = C[I - K(s)A]^{-1} K(s)BX(s)$$

Ostatecznie:

$$V(s) = \tilde{K}(s)X(s), \quad \text{gdzie: } \tilde{K}(s) = C[I - K(s)A]^{-1} K(s)B$$

Typowe struktury

∞ Połączenie szeregowe



$$Y^{(1)}(s) = K_1(s)U^{(1)}(s) = K_1(s)U(s)$$

$$Y^{(2)}(s) = K_2(s)U^{(2)}(s) = K_2(s)Y^{(1)}(s) = K_2(s)K_1(s)U^{(1)}(s)$$

.....

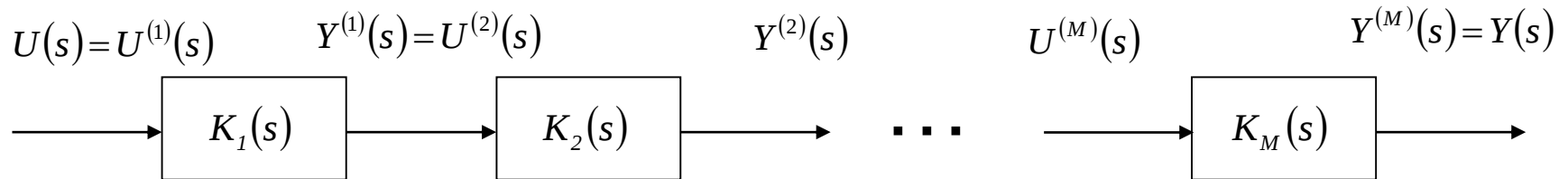
$$Y^{(M)}(s) = Y(s) = K_M(s)U^{(M)}(s) = K_M(s)K_{M-1}(s)U^{(M-1)}(s) = K_M(s)K_{M-1}(s)\dots K_2(s)K_1(s)U^{(1)}(s) =$$

$$= K_M(s)K_{M-1}(s)\dots K_2(s)K_1(s)U(s)$$

$$K(s) = \prod_{m=1}^M K_m(s)$$

Typowe struktury

∞ Połączenie szeregowe



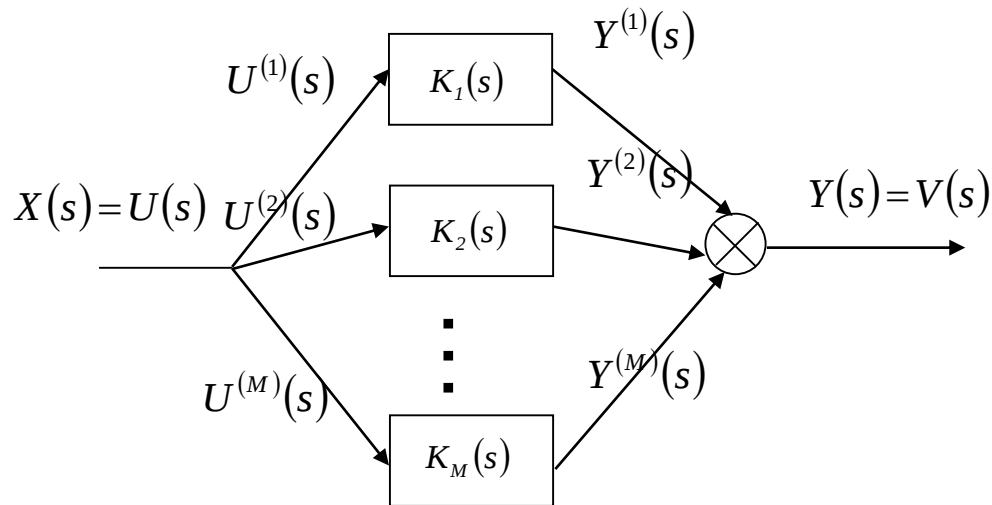
Transmitancja zastępcza:

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K_M(s)K_{M-1}(s)\dots K_2(s)K_1(s)$$

$$K(s) = \prod_{m=1}^M K_m(s)$$

Typowe struktury

∞ Połączenia równoległe



$$U^{(1)}(s) = U^{(2)}(s) = \dots U^{(M)}(s) = U(s)$$

$$Y(s) = \sum_{i=1}^M Y^{(i)}(s)$$

$$Y^{(1)}(s) = K_1(s)U(s)$$

$$Y^{(2)}(s) = K_2(s)U(s)$$

.....

$$Y^{(M)}(s) = K_M(s)U(s)$$

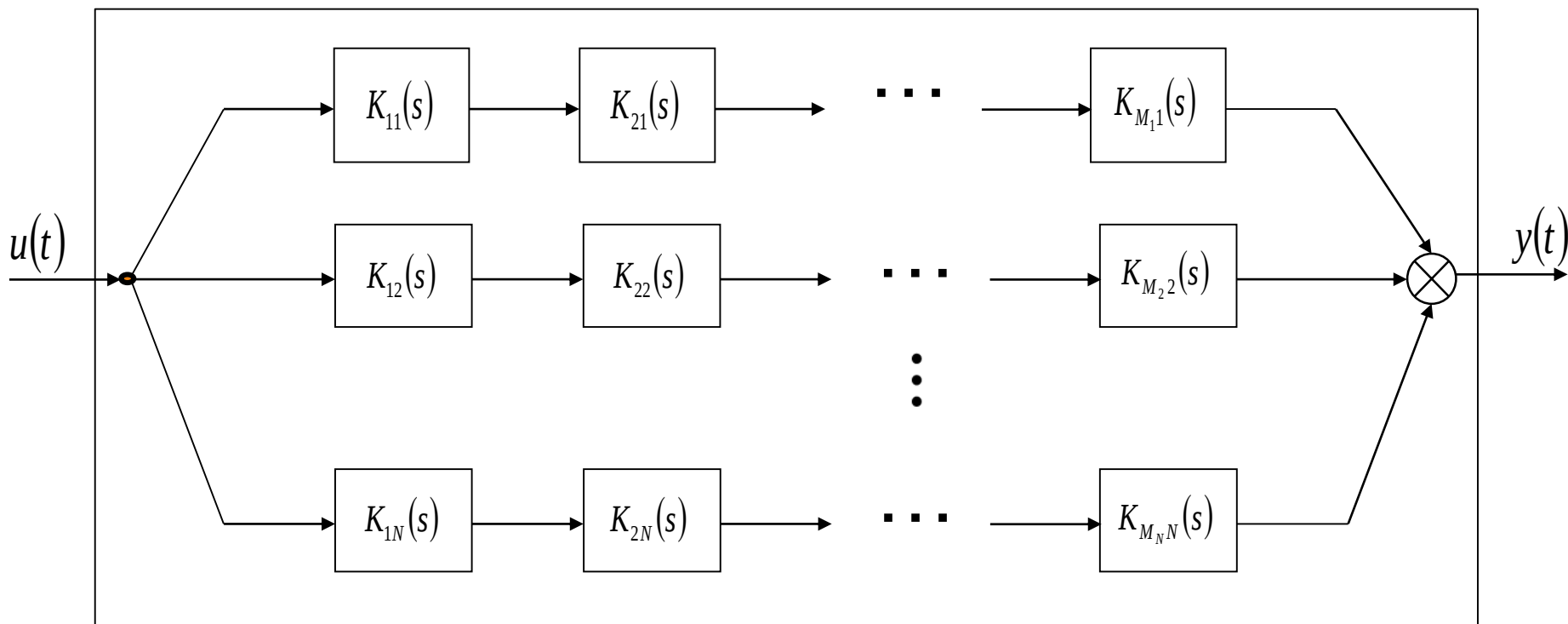
$$Y(s) = U(s) \sum_{i=1}^M K_i(s)$$

○ Transmitancja zastępcza:

$$K(s) = \sum_{m=1}^M K_m(s)$$

Typowe struktury

Struktura szeregowo-równoległa

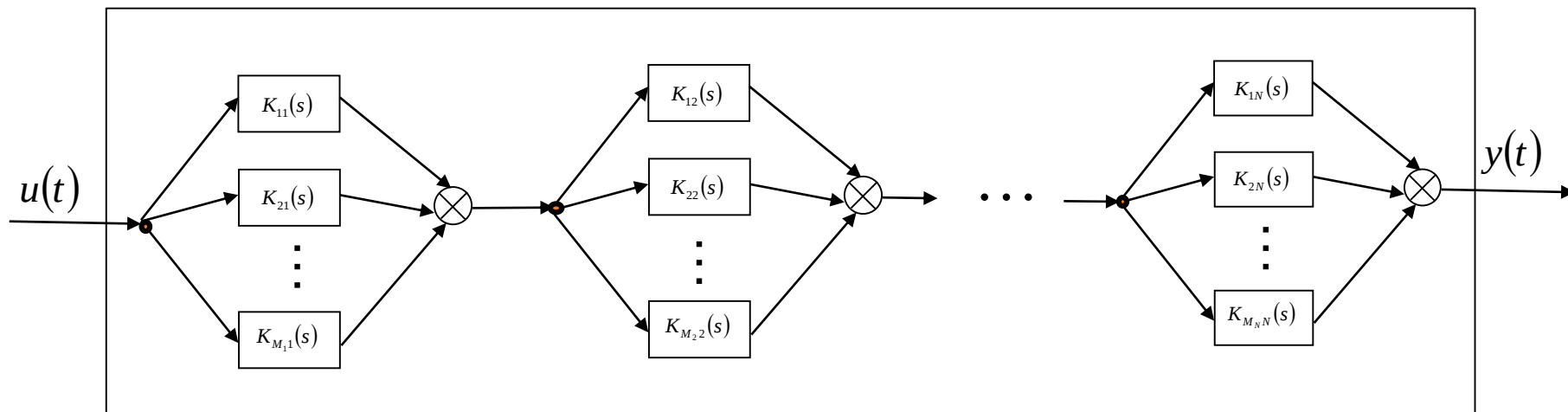


Transmitancja zastępcza:

$$K(s) = \sum_{n=1}^N \prod_{m=1}^{M_n} K_{nm}(s)$$

Typowe struktury

Struktura równoległo-szeregowa

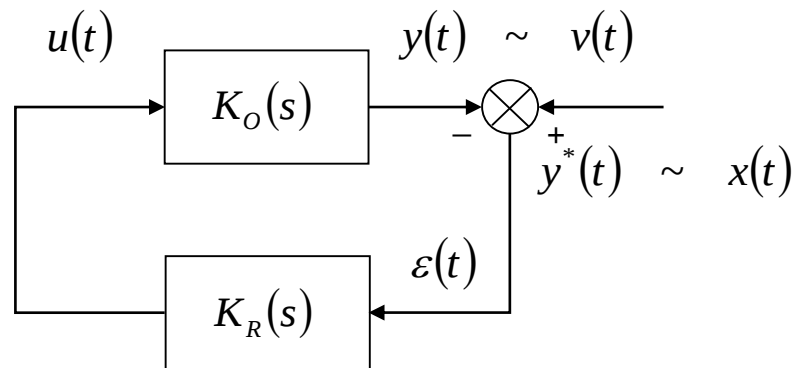


Transmitancja zastępcza:

$$K(s) = \prod_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} K_{mn}(s)$$

Typowe struktury

∞ Układ ze sprzężeniem zwrotnym



$$Y(s) = K_o(s)U(s)$$

$$U(s) = K_R(s)E(s)$$

$$E(s) = Y^*(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = K_Z(s)Y^*(s)$$

$$V(s) = Y(s), \quad X(s) = Y^*(s)$$

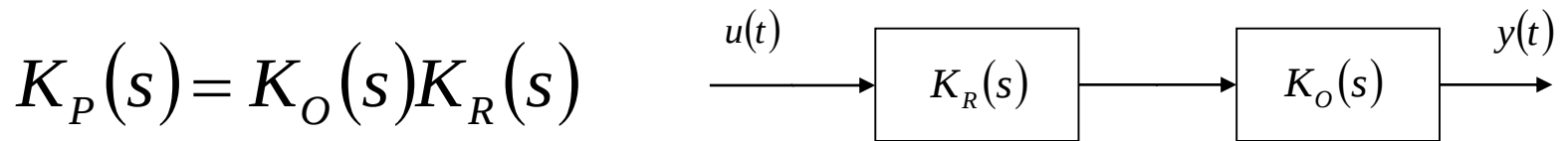
Typowe struktury

∞ Układ ze sprzężeniem zwrotnym

$K_Z(s)$ - Transmitancja systemu zamkniętego

$$K_Z(s) = \frac{K_P(s)}{1 + K_P(s)}$$

$K_P(s)$ - Transmitancja układu otwartego

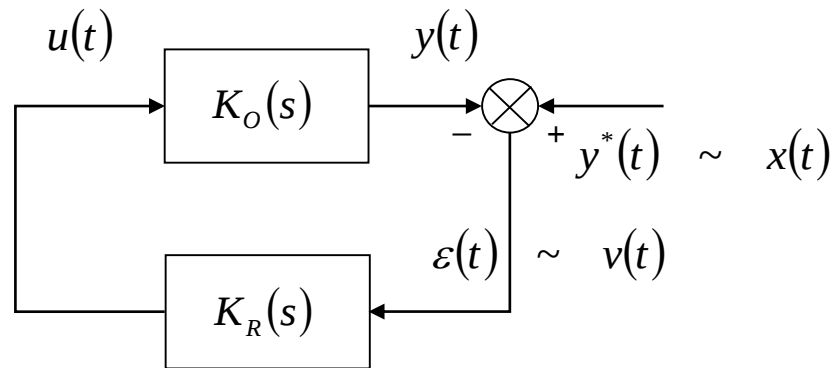


Ostatecznie:

$$K_Z(s) = \frac{Y(s)}{Y^*(s)} = \frac{K_O(s)K_R(s)}{1 + K_O(s)K_R(s)}$$

Typowe struktury

☞ Układ ze sprzężeniem zwrotnym



$$Y(s) = K_o(s)U(s)$$

$$U(s) = K_R(s)E(s)$$

$$E(s) = Y^*(s) - Y(s)$$

$$E(s) = K_\varepsilon(s)Y^*(s)$$

$$V(s) = E(s), \quad X(s) = Y^*(s)$$

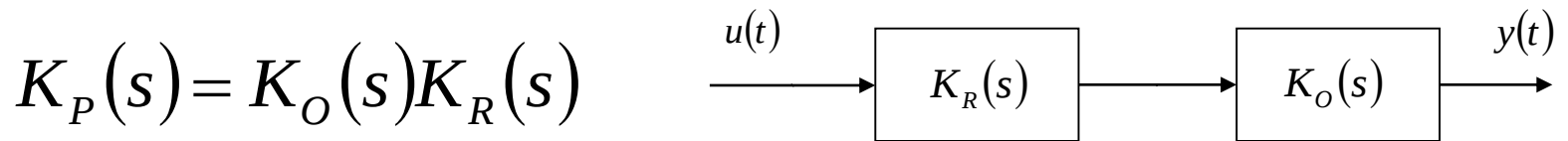
Typowe struktury

∞ Układ ze sprzężeniem zwrotnym

$K_\varepsilon(s)$ - Transmitancja błędu układu zamkniętego

$$K_\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + K_P(s)}$$

$K_P(s)$ - Transmitancja układu otwartego

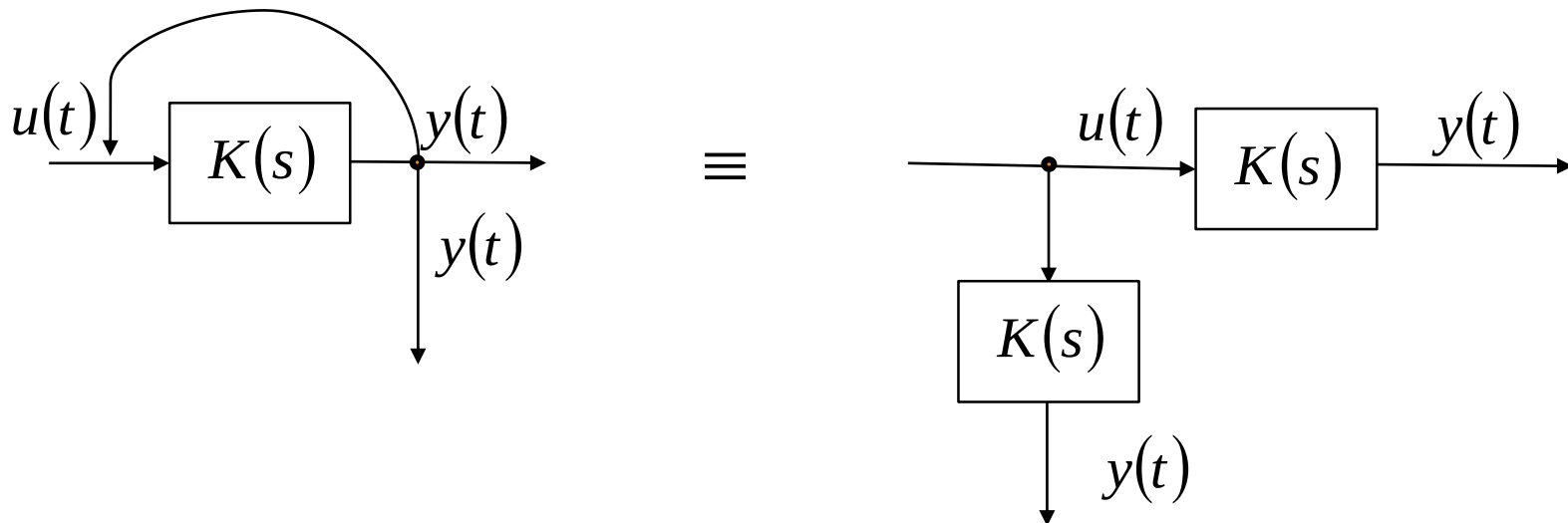


Ostatecznie:

$$K_\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{Y^*(s)} = \frac{1}{1 + K_O(s)K_R(s)}$$

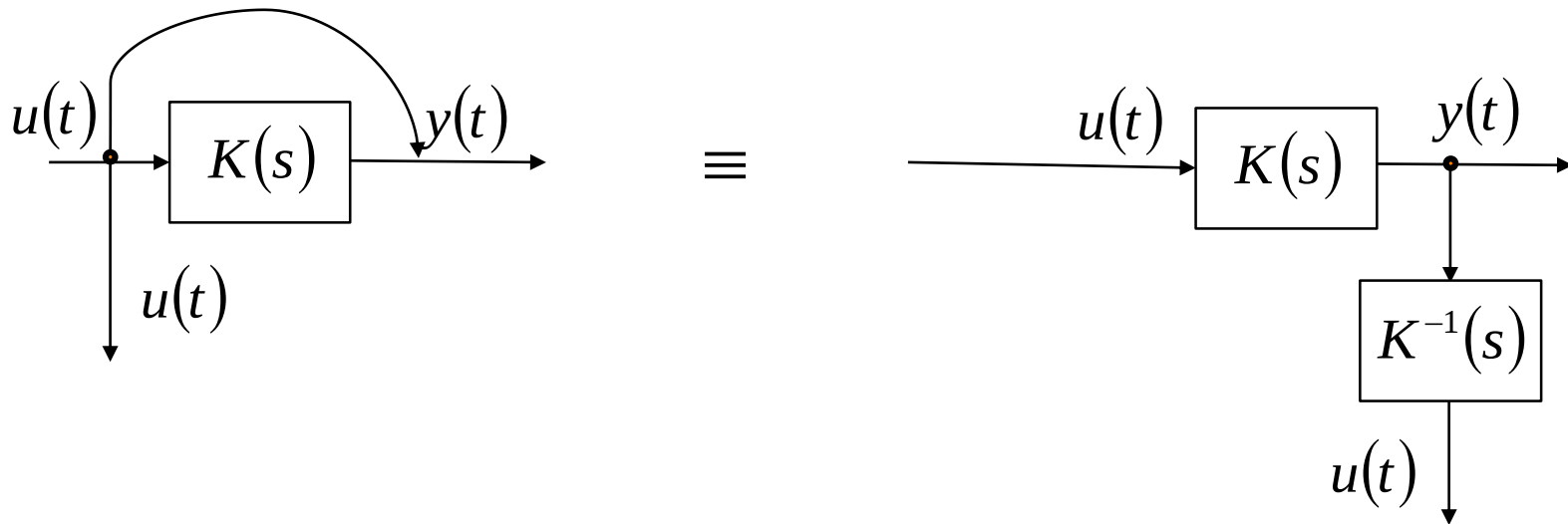
Przekształcanie schematów blokowych

Przenoszenie węzła zaczepowego z wyjścia na wejście



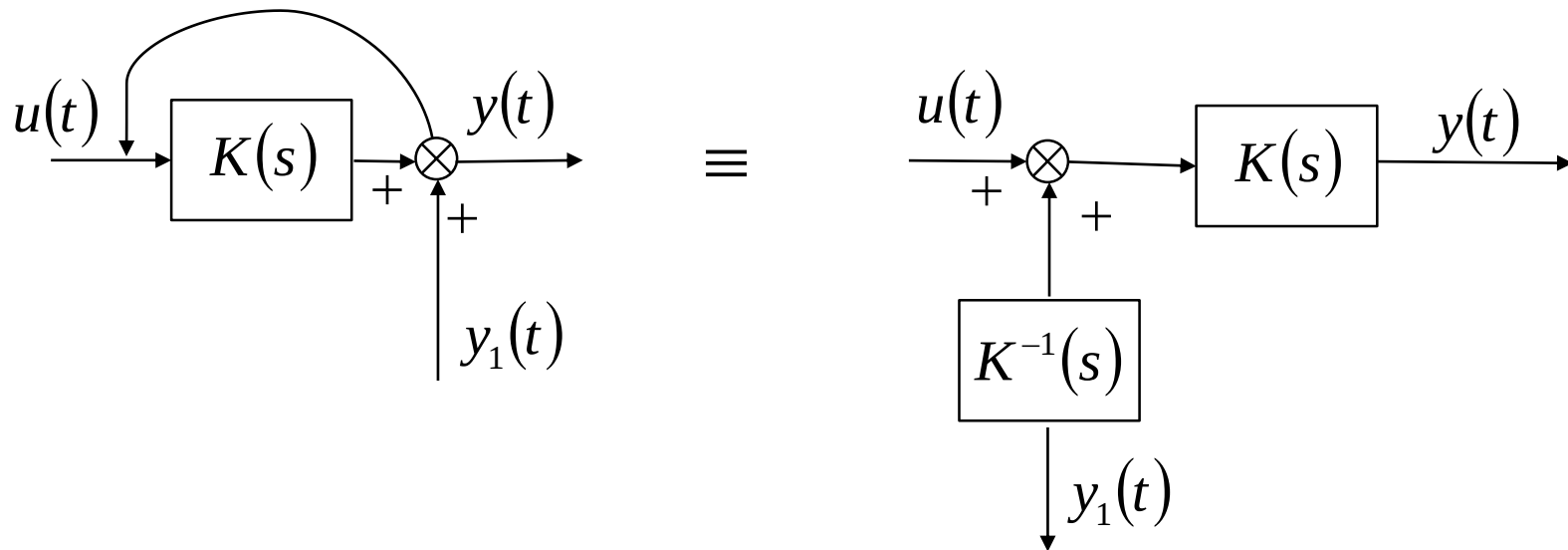
Przekształcanie schematów blokowych

Przenoszenie węzła zaczepowego z wejścia na wyjście



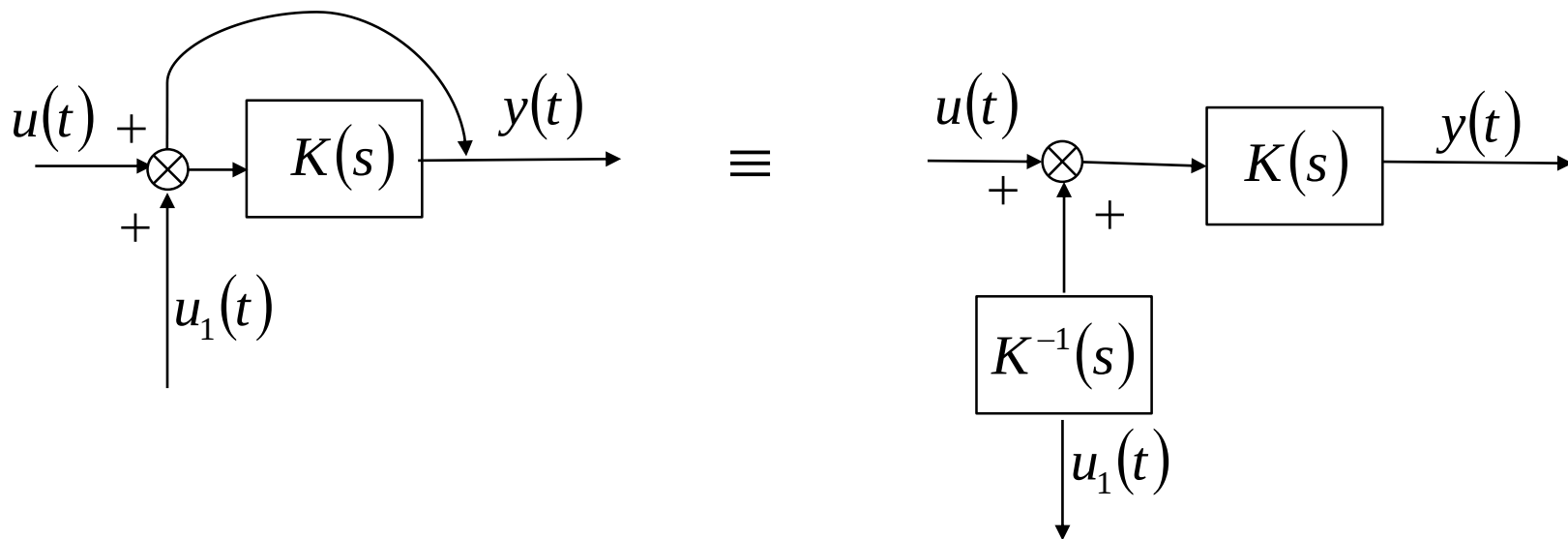
Przekształcanie schematów blokowych

Przenoszenie węzła sumacyjnego z wyjścia na wejście



Przekształcanie schematów blokowych

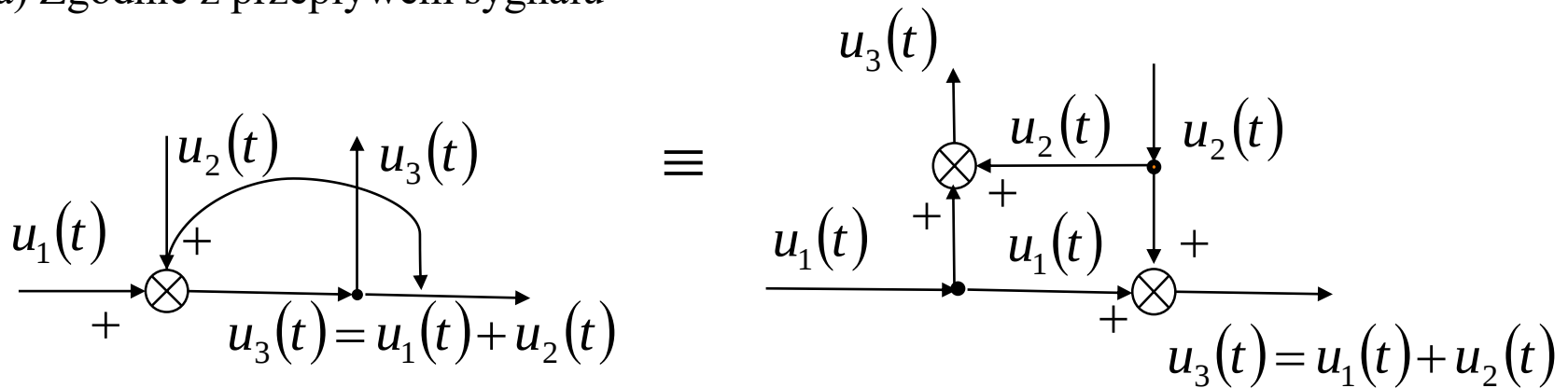
Przenoszenie węzła sumacyjnego z wejścia na wyjście



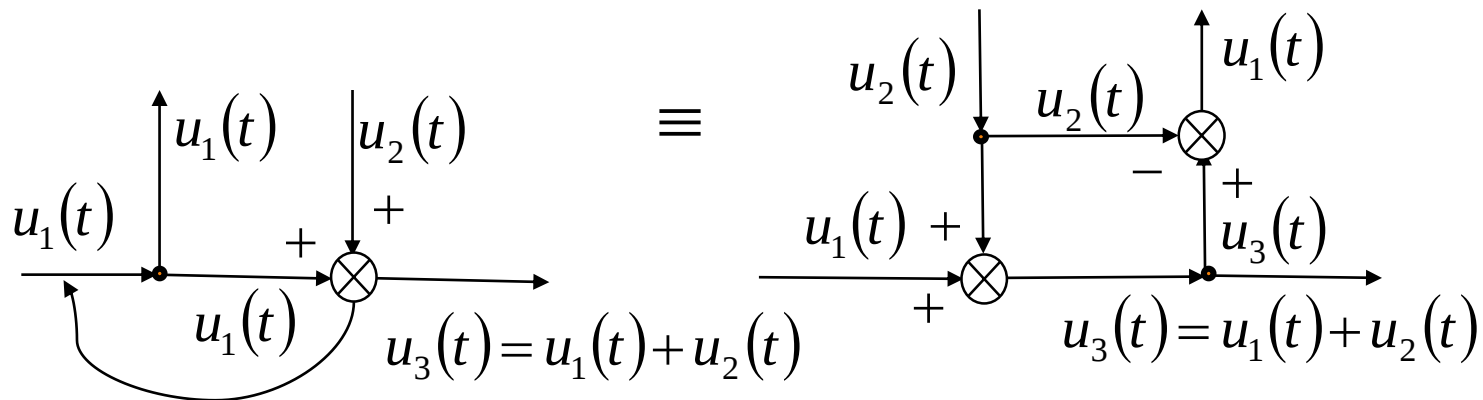
Przekształcanie schematów blokowych

Zmiana węzła sumacyjnego z zaczepowym

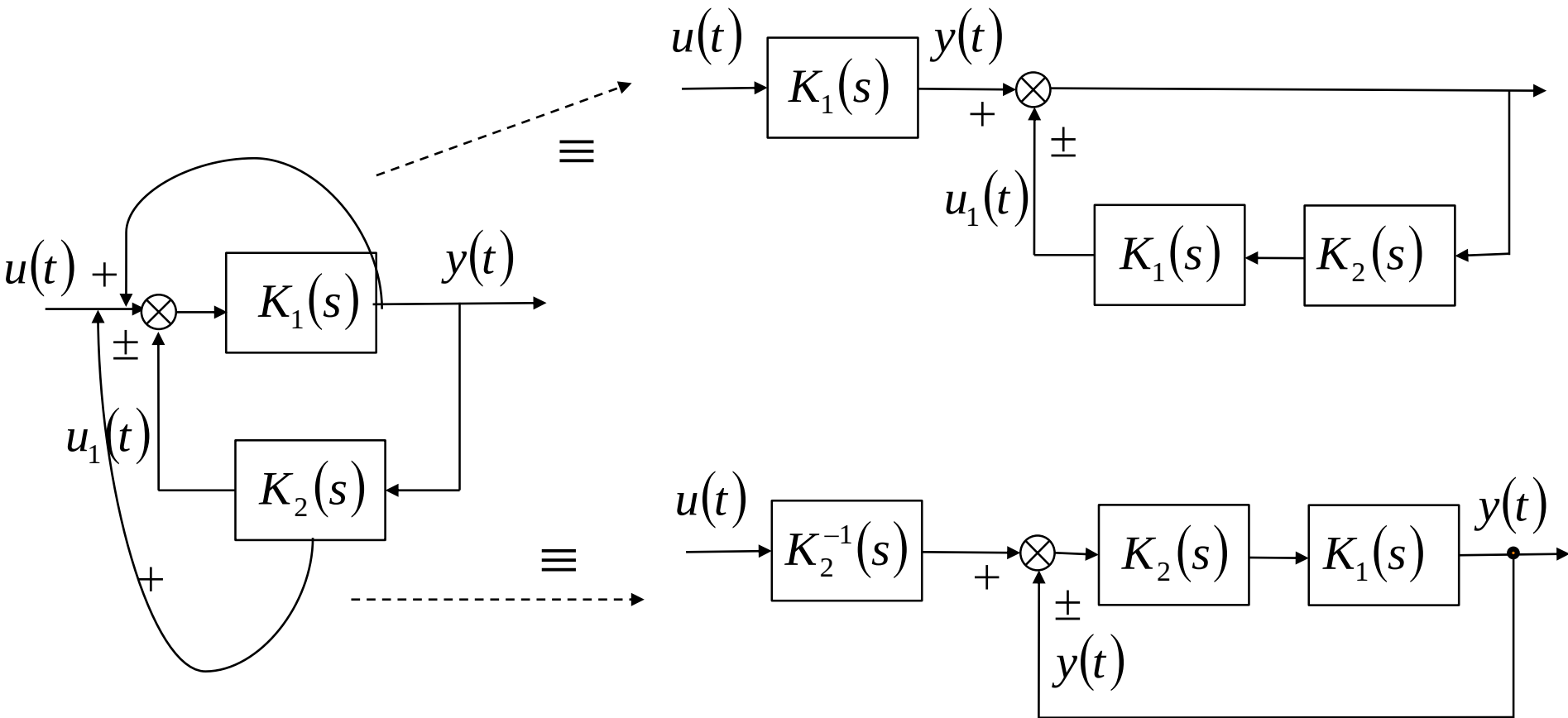
a) Zgodnie z przepływem sygnału



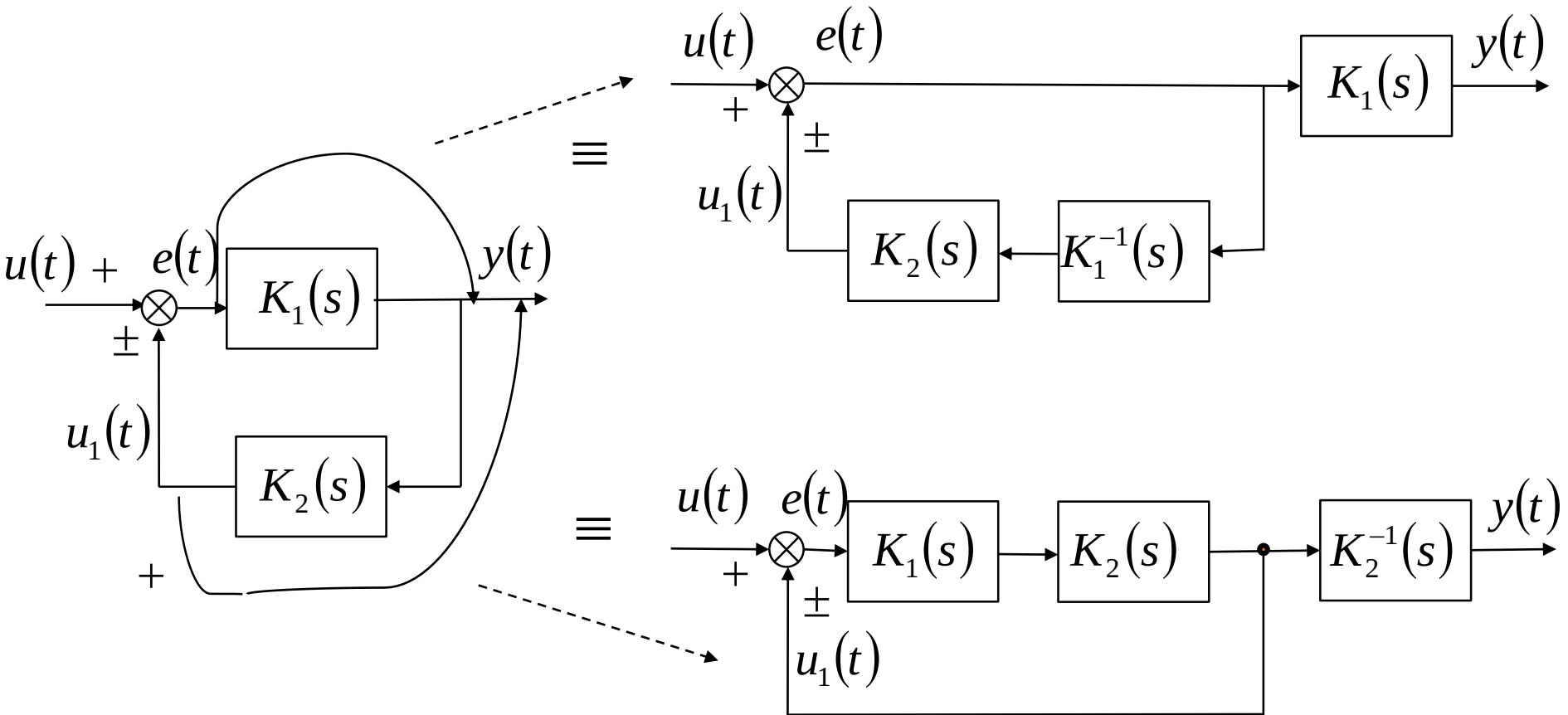
a) W przeciwnym kierunku do przepływu sygnału



Przekształcanie schematów blokowych



Przekształcanie schematów blokowych



Dziękuję za uwagę

