

Modele systemów dynamicznych



Wykład 5b. Powiązania pomiędzy opisami

Równanie stanu → Transmitancja - układ ciągły



$u(t)$ - Sygnał wejściowy (ciągły) $\dim u(t) = S$

$y(t)$ - Sygnał wyjściowy (ciągły) $\dim y(t) = L$

$x(t)$ - Wektor stanu systemu $\dim x(t) = K$

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A - (K \times K), B - (K \times S),$$

$$C - (L \times K), D - (L \times S)$$

Sterowalność względem stanu:

$$H \overset{\Delta}{=} [B : AB : A^2B : \dots : A^{K-1}B] \quad rzH = K \quad \dim u = 1 \quad \det H \neq 0$$

Sterowalność względem wyjścia:

$$Q \overset{\Delta}{=} [D : CB : CAB : CA^2B : \dots : CA^{K-1}B] \quad rzQ = K + 1 \quad \dim u = \dim y = 1 \quad \det Q \neq 0$$

Obserwowalność:

$$G \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{K-1} \end{bmatrix} \quad rzG = K \quad \dim u = 1 \quad \det G \neq 0$$

Równanie stanu $\rightarrow$ Transmitancja

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \mathcal{L}[Ax(t) + Bu(t)], \quad x(0) = 0_K$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[Cx(t) + Du(t)]$$

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow (sI - A)X(s) = BU(s) \quad | \times (sI - A)^{-1}$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \qquad X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s)$$

Oznaczmy przez:

$$K(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

$$Y(s) = K(s)U(s)$$

Transmitancja
układu

Równanie stanu → Transmitancja

Korzystając z postaci kanonicznej, tj.:

$$A = \begin{bmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{31} & A_{32} \\ 0 & A_{44} & 0 & A_{42} \\ 0 & 0 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 & 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad C_4 \quad 0 \quad C_2]$$

$$K(s) = C(sI - A)^{-1}B + D =$$

$$\begin{bmatrix} M & P \\ 0 & N \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M^{-1} & M^{-1}PN^{-1} \\ 0 & N^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= [0 \quad C_4 \quad 0 \quad C_2] \begin{bmatrix} sI - A_{33} & A_{34} & A_{31} & A_{32} \\ 0 & sI - A_{44} & 0 & A_{42} \\ 0 & 0 & sI - A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 & 0 & sI - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + D =$$

$$= [0 \quad C_4 \quad 0 \quad C_2] \begin{bmatrix} [sI - A_{33}]^{-1} & * & * & * \\ 0 & [sI - A_{44}]^{-1} & * & * \\ 0 & 0 & [sI - A_{11}]^{-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & [sI - A_{22}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + D =$$

$$= C_4 [sI - A_{44}]^{-1} B_4 + D$$

Równanie stanu $\rightarrow$ Transmitancja

Po przekształceniach otrzymujemy macierz transmitancji

$$K(s) = C_4 [sI - A_{44}]^{-1} B_4 + D$$

Zwróćmy uwagę, że w transmitancja pozostaje tylko część sterowalna i obserwowalna

Transmitancja układu opisuje jedynie część sterowalną i obserwowalną układu

Dla układu jednowymiarowego tj.: $\dim u = S = \dim y = L = 1$

$$K(s) = \frac{b_v s^v + b_{v-1} s^{v-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad m > v$$

Równanie stanu $\rightarrow$ Transmitancja

Przykład:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Równanie stanu $\rightarrow$ Transmitancja

Przykład

Sterowalność:

$$H \overset{\Delta}{=} [B:AB] = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det H = 0 \times (-5) - 1 \times 1 = -1 \neq 0$$

Obserwowalność:

$$G \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -12 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\det G = 3 \times (-7) - (-12) \times 2 = 3 \neq 0$$

Równanie stanu $\rightarrow$ Transmitancja

Przykład

Układ jest sterowalny i obserwowalny

$$A_{44} = A, \quad B_4 = B, \quad C_4 = C, \quad D = 0$$

$$\begin{aligned} K(s) &= C_4 [sI - A_{44}]^{-1} B_4 + D = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \left[sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \dots = \frac{2s + 3}{s^2 + 5s + 6} \end{aligned}$$

$$K(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 5s + 6}$$

Transmitancja $\rightarrow$ Równanie stanu

$$K(s) = \frac{b_\nu s^\nu + b_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad m > \nu; \quad \nu \rightarrow m-1 \quad | s^{-m}$$

$$K(s) = \frac{b_{m-1} s^{-1} + b_{m-2} s^{-2} + \dots + b_1 s^{1-m} + b_0 s^{-m}}{1 + a_{m-1} s^{-1} + a_{m-2} s^{-2} + \dots + a_1 s^{1-m} + a_0 s^{-m}}$$

$$Y(s) = K(s)U(s) = (b_{m-1} s^{-1} + b_{m-2} s^{-2} + \dots + b_1 s^{1-m} + b_0 s^{-m})E(s)$$

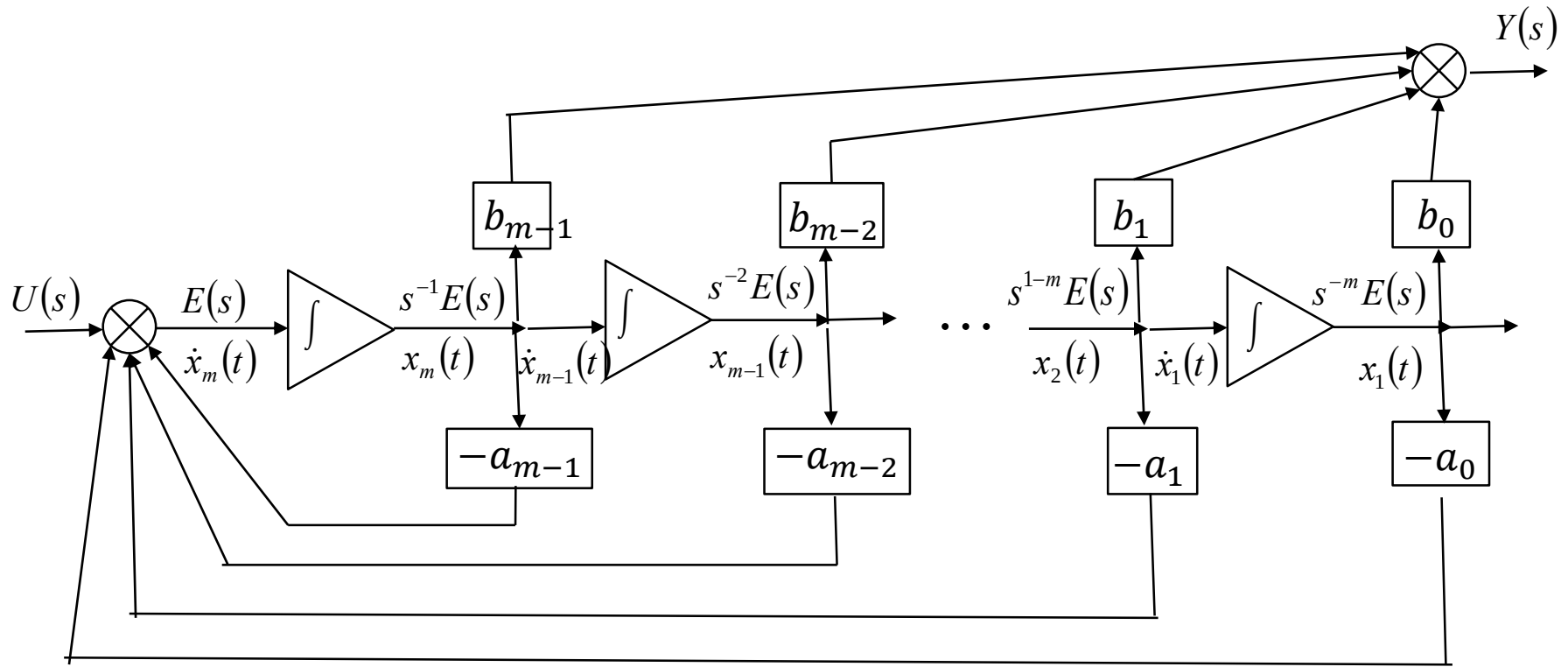
gdzie:

$$E(s) = \frac{U(s)}{1 + a_{m-1} s^{-1} + a_{m-2} s^{-2} + \dots + a_1 s^{1-m} + a_0 s^{-m}}$$

$$E(s) = U(s) - (a_{m-1} s^{-1} + a_{m-2} s^{-2} + \dots + a_1 s^{1-m} + a_0 s^{-m})E(s)$$

Transmitancja → Równanie stanu

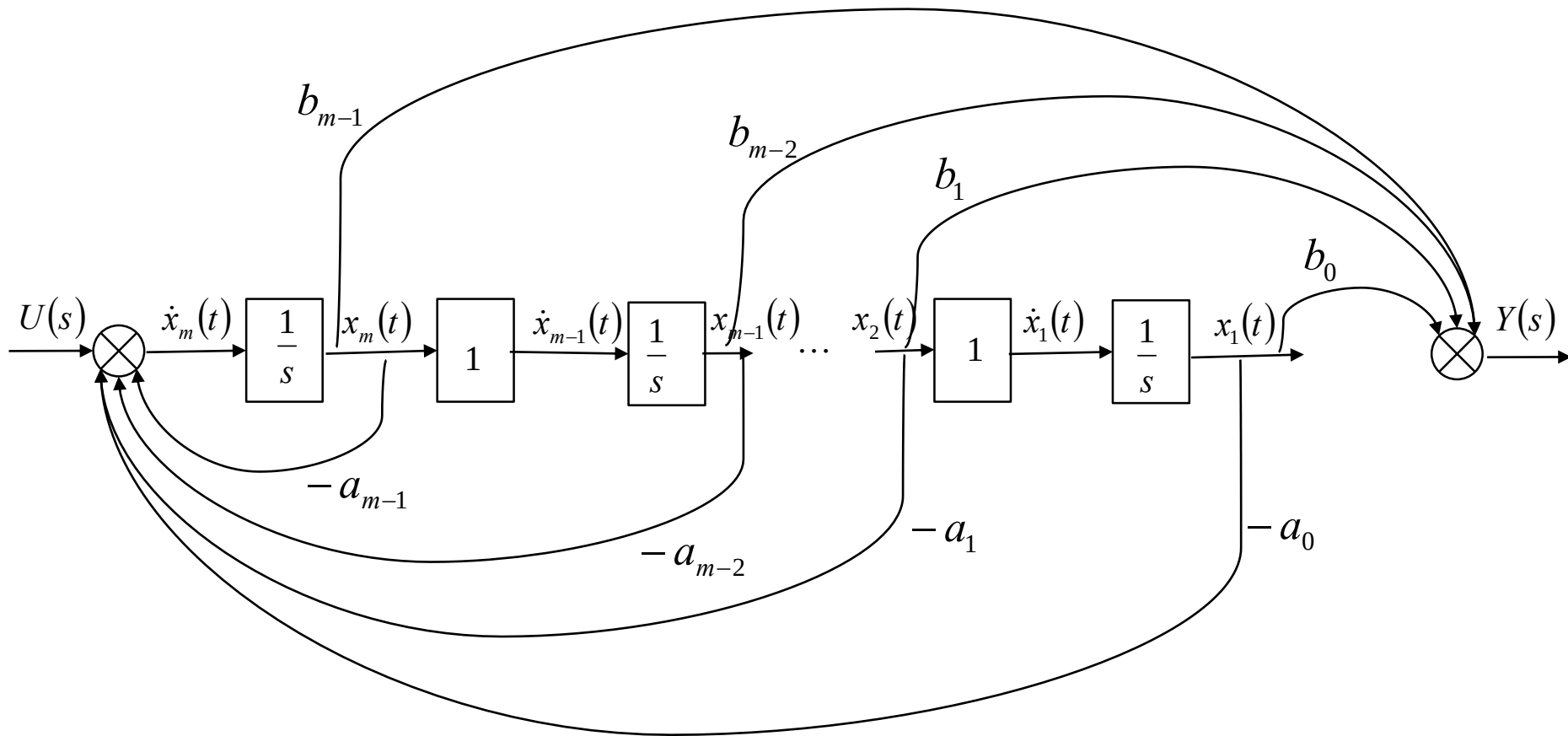
$$Y(s) = K(s)U(s) = (b_{m-1}s^{-1} + b_{m-2}s^{-2} + \dots + b_1s^{1-m} + b_0s^{-m})E(s)$$



$$E(s) = U(s) - (a_{m-1}s^{-1} + a_{m-2}s^{-2} + \dots + a_1s^{1-m} + a_0s^{-m})E(s)$$

Transmitancja → Równanie stanu

$$Y(s) = K(s)U(s) = (b_{m-1}s^{-1} + b_{m-2}s^{-2} + \dots + b_1s^{1-m} + b_0s^{-m})E(s)$$



$$E(s) = U(s) - (a_{m-1}s^{-1} + a_{m-2}s^{-2} + \dots + a_1s^{1-m} + a_0s^{-m})E(s)$$

Transmitancja → Równanie stanu

$$x_1(t) = \int x_2(t) dt$$

$$x_2(t) = \int x_3(t) dt$$

$\vdots$

$$x_{m-1}(t) = \int x_m(t) dt$$

$$x_m(t) = \int (-a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \dots - a_{m-1} x_m(t) + u(t)) dt$$

$$y(t) = b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t) + \dots + b_{m-1} x_m(t)$$

Transmitancja → Równanie stanu

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_{m-1}(t)}{dt} = x_m(t)$$

$$\frac{dx_m(t)}{dt} = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \dots - a_{m-1}x_m(t) + u(t)$$

$$y(t) = b_0x_1(t) + b_1x_2(t) + \dots + b_{m-1}x_m(t)$$

Transmitancja → Równanie stanu

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_{m-1}(t)}{dt} \\ \frac{dx_m(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{m-1}(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{m-1}(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix}$$

Transmitancja → Równanie stanu

$$K(s) = \frac{b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$A \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{m-1} \end{bmatrix}, \quad B \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x(t) \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{m-1}(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix},$$

$$C \overset{\Delta}{=} [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{m-2} \quad b_{m-1}], \quad D = 0$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

∞ Przykład

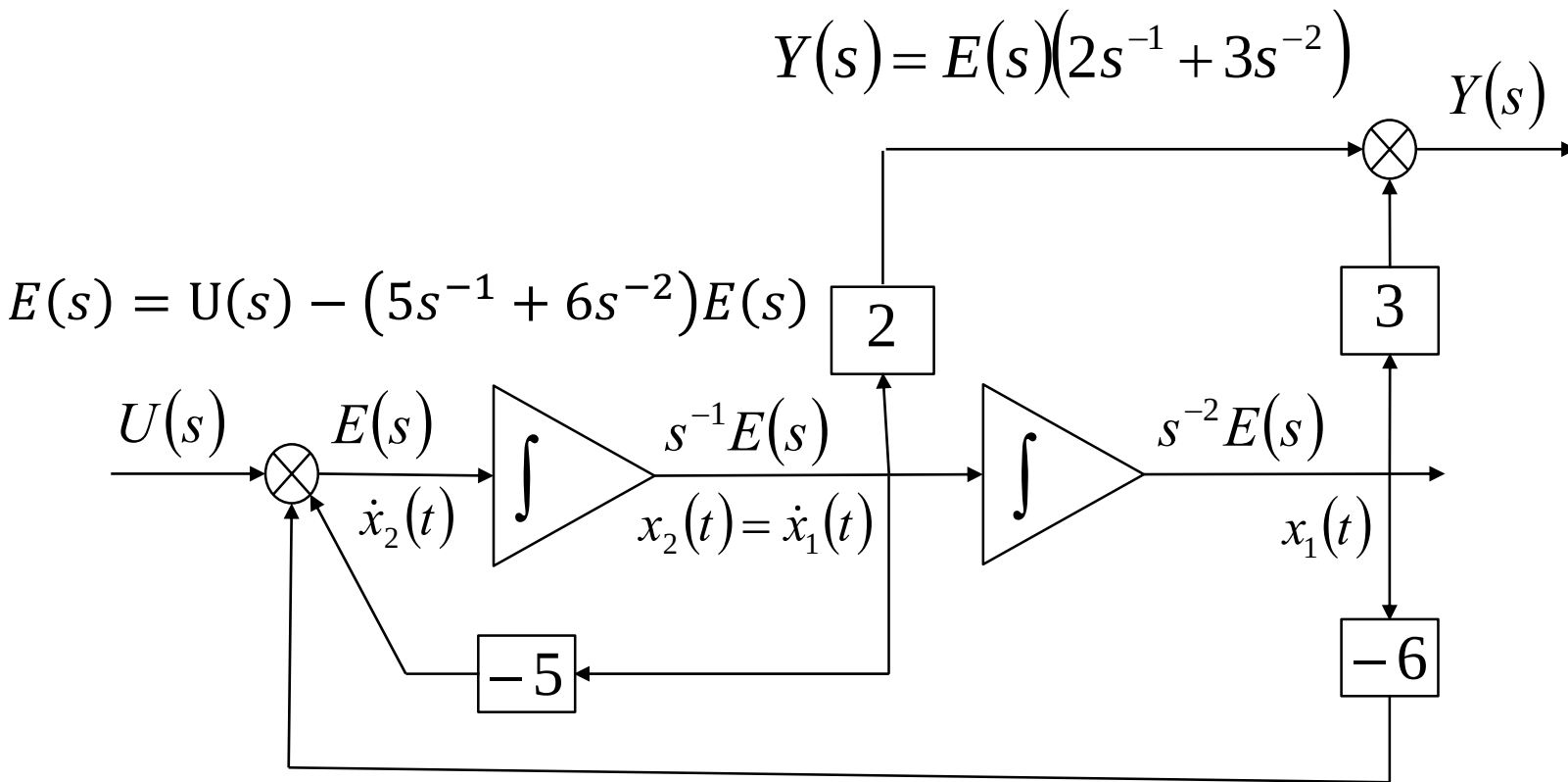
$$K(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 5s + 6} \Big| s^{-2}$$

$$K(s) = \frac{2s^{-1} + 3s^{-2}}{1 + 5s^{-1} + 6s^{-2}}$$

$$Y(s) = E(s)(2s^{-1} + 3s^{-2})$$

$$E(s) = U(s) - (5s^{-1} + 6s^{-2})E(s)$$

Transmitancja → Równanie stanu

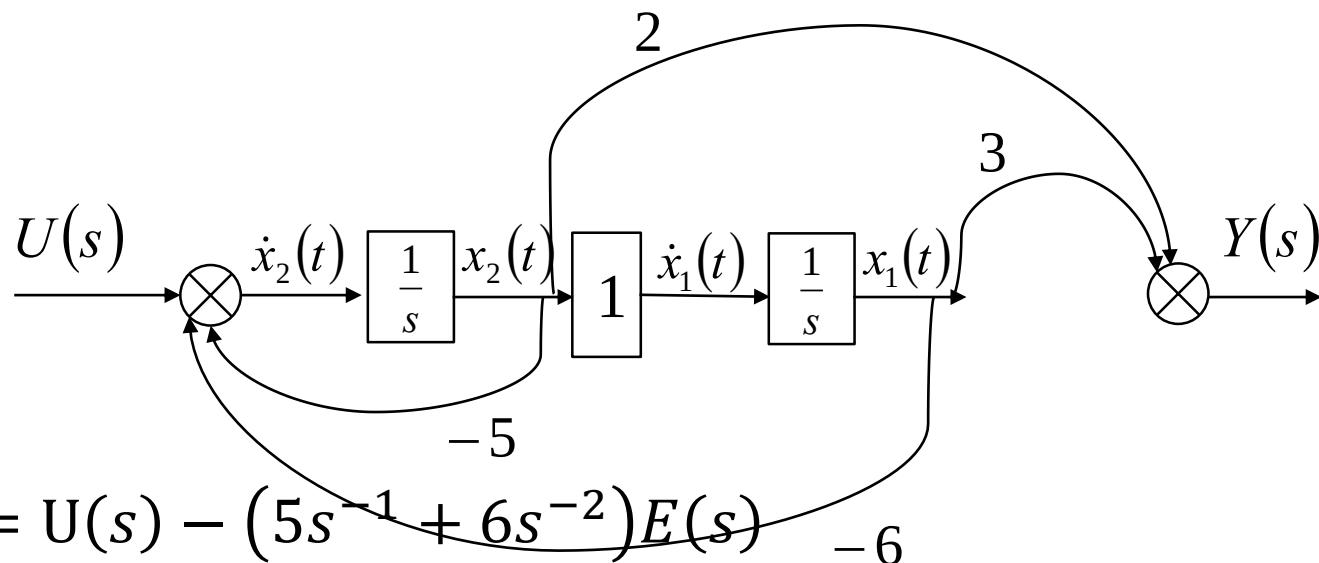


$$x_1(t) = \int x_2(t) dt$$

$$x_2(t) = \int (-6x_1(t) - 5x_2(t) + u(t)) dt \quad y(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t)$$

Transmitancja → Równanie stanu

$$Y(s) = E(s)(2s^{-1} + 3s^{-2})$$



$$E(s) = U(s) - (5s^{-1} + 6s^{-2})E(s)$$

$$x_1(t) = \int x_2(t) dt$$

$$x_2(t) = \int (-6x_1(t) - 5x_2(t) + u(t)) dt \quad y(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t)$$

Transmitancja → Równanie stanu

$$x_1(t) = \int x_2(t) dt$$

$$x_2(t) = \int (-6x_1(t) - 5x_2(t) + u(t)) dt$$

$$y(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) - 5x_2(t) + u(t)$$

$$y(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t)$$

Transmitancja $\rightarrow$ Równanie stanu

$$K(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 5s + 6}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [3 \quad 2], \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

$$y(t) = [3 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Równanie stanu → Transmitancja - układ dyskretny



u_n - Sygnał wejściowy (*dyskretny*) $\dim u(t) = S$

y_n - Sygnał wyjściowy (*dyskretny*) $\dim y(t) = L$

x_n - Wektor stanu systemu $\dim x(t) = K$

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$$

$$y_n = Cx_n + Du_n$$

$$A - (K \times K), B - (K \times S),$$

$$C - (L \times K), D - (L \times S)$$

Sterowalność względem stanu:

$$H = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{K-1}B \end{bmatrix} \quad rzH = K \quad \dim u = 1 \quad \det H \neq 0$$

Sterowalność względem wyjścia:

$$rzQ = K + 1 \quad \dim u = \dim y = 1 \quad \det Q \neq 0$$

Obserwowalność:

$$G = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{K-1} \end{bmatrix}$$

$$rzG = K \quad \dim u = 1 \quad \det G \neq 0$$

Równanie stanu $\rightarrow$ Transmitancja

$$\mathcal{Z}[x_{n+1}] = \mathcal{Z}[Ax_n + Bu_n], \quad x_0 = 0_K$$

$$\mathcal{Z}[y_n] = \mathcal{Z}[Cx_n + Du_n]$$

$$zX(z) = AX(z) + BU(z) \Rightarrow (zI - A)X(z) = BU(z) \Big| (zI - A)^{-1}$$

$$Y(z) = CX(z) + DU(z) \qquad X(z) = (zI - A)^{-1} BU(z)$$

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} BU(z) + DU(z)$$

Oznaczmy przez:

$$K(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$$

$$Y(s) = K(z)U(z)$$

Transmitancja
układu

Równanie stanu → Transmitancja

Korzystając z postaci kanonicznej, tj.:

$$A = \begin{bmatrix} A_{33} & A_{34} & A_{31} & A_{32} \\ 0 & A_{44} & 0 & A_{42} \\ 0 & 0 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 & 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad C_4 \quad 0 \quad C_2]$$

$$K(z) = C(zI - A)^{-1}B + D =$$

$$\begin{bmatrix} M & P \\ 0 & N \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M^{-1} & M^{-1}PN^{-1} \\ 0 & N^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= [0 \quad C_4 \quad 0 \quad C_2] \begin{bmatrix} zI - A_{33} & A_{34} & A_{31} & A_{32} \\ 0 & zI - A_{44} & 0 & A_{42} \\ 0 & 0 & zI - A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 & 0 & zI - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + D =$$

$$= [0 \quad C_4 \quad 0 \quad C_2] \begin{bmatrix} [zI - A_{33}]^{-1} & * & * & * \\ 0 & [zI - A_{44}]^{-1} & * & * \\ 0 & 0 & [zI - A_{11}]^{-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & [zI - A_{22}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + D =$$

$$= C_4 [zI - A_{44}]^{-1} B_4 + D$$

Równanie stanu $\rightarrow$ Transmitancja

Po przekształceniach otrzymujemy macierz transmitancji

$$K(z) = C_4 [zI - A_{44}]^{-1} B_4 + D$$

Zwróćmy uwagę, że w transmitancja pozostaje tylko część sterowalna i obserwowalna

Transmitancja układu opisuje jedynie część sterowalną i obserwowalną układu

Dla układu jednowymiarowego tj.: $\dim u = S = \dim y = L = 1$

$$K(s) = \frac{b_v z^v + b_{v-1} z^{v-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0} \quad m > v$$

Równanie stanu $\rightarrow$ Transmitancja

Przykład:

$$\begin{bmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_n$$

$$y_n = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{bmatrix}$$

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$$

$$y_n = Cx_n$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad x_n = \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Równanie stanu $\rightarrow$ Transmitancja

Przykład

Sterowalność:

$$H \overset{\Delta}{=} [B:AB] = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det H = 0 \times (-5) - 1 \times 1 = -1 \neq 0$$

Obserwowalność:

$$G \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -12 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\det G = 3 \times (-7) - (-12) \times 2 = 3 \neq 0$$

Równanie stanu $\rightarrow$ Transmitancja

Przykład

Układ jest sterowalny i obserwowalny

$$A_{44} = A, \quad B_4 = B, \quad C_4 = C, \quad D = 0$$

$$\begin{aligned} K(z) &= C_4 [sI - A_{44}]^{-1} B_4 + D = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \left[zI - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \dots = \frac{2z + 3}{z^2 + 5z + 6} \end{aligned}$$

$$K(s) = \frac{2z + 3}{z^2 + 5z + 6}$$

$$K(z) = \frac{b_\nu z^\nu + b_{\nu-1} z^{\nu-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0} \quad m > \nu; \quad \nu \rightarrow m-1 \quad \Big| z^{-m}$$

$$K(z) = \frac{b_{m-1} z^{-1} + b_{m-2} z^{-2} + \dots + b_1 z^{1-m} + b_0 z^{-m}}{1 + a_{m-1} s^{-1} + a_{m-2} s^{-2} + \dots + a_1 s^{1-m} + a_0 s^{-m}}$$

$$Y(z) = K(z)U(z) = (b_{m-1} z^{-1} + b_{m-2} z^{-2} + \dots + b_1 z^{1-m} + b_0 z^{-m})E(z)$$

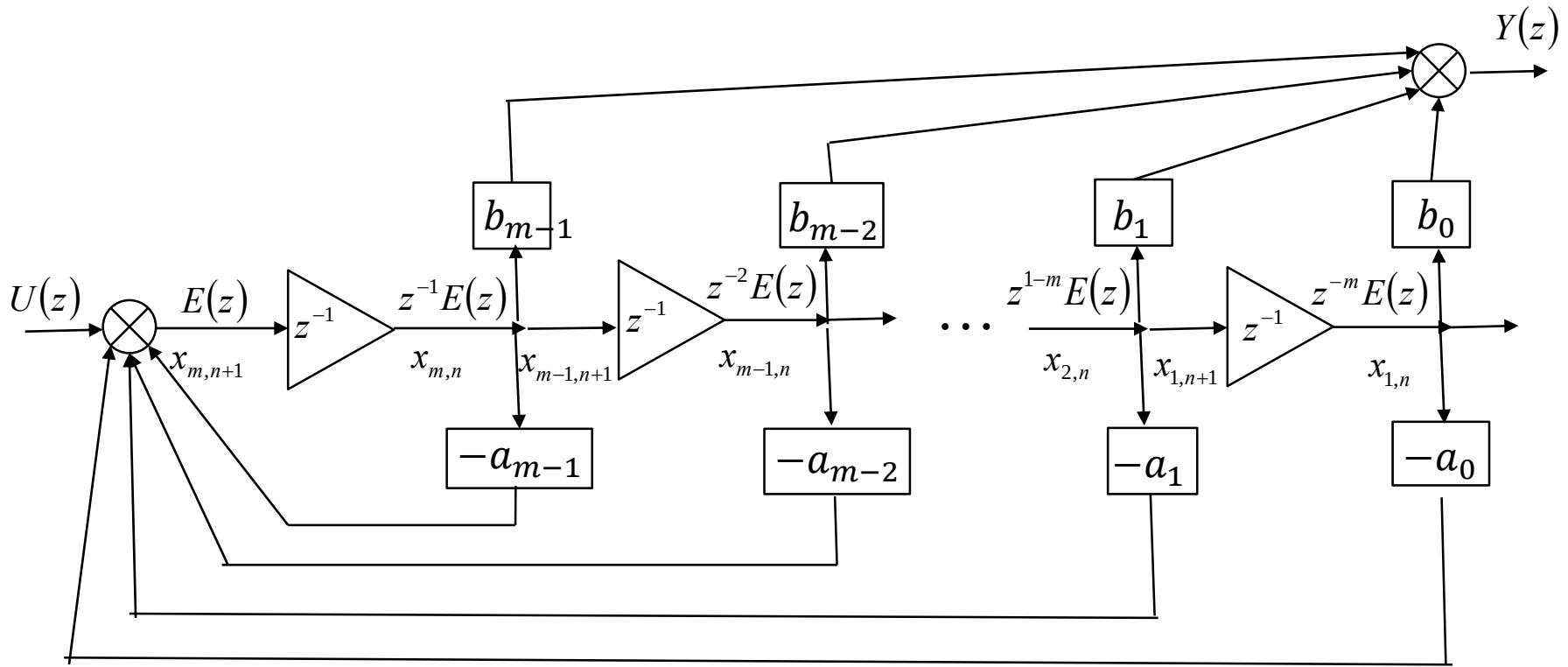
gdzie:

$$E(z) = \frac{U(z)}{1 + a_{m-1} z^{-1} + a_{m-2} z^{-2} + \dots + a_1 z^{1-m} + a_0 z^{-m}}$$

$$E(z) = U(z) - (a_{m-1} z^{-1} + a_{m-2} z^{-2} + \dots + a_1 z^{1-m} + a_0 z^{-m})E(z)$$

Transmitancja → Równanie stanu

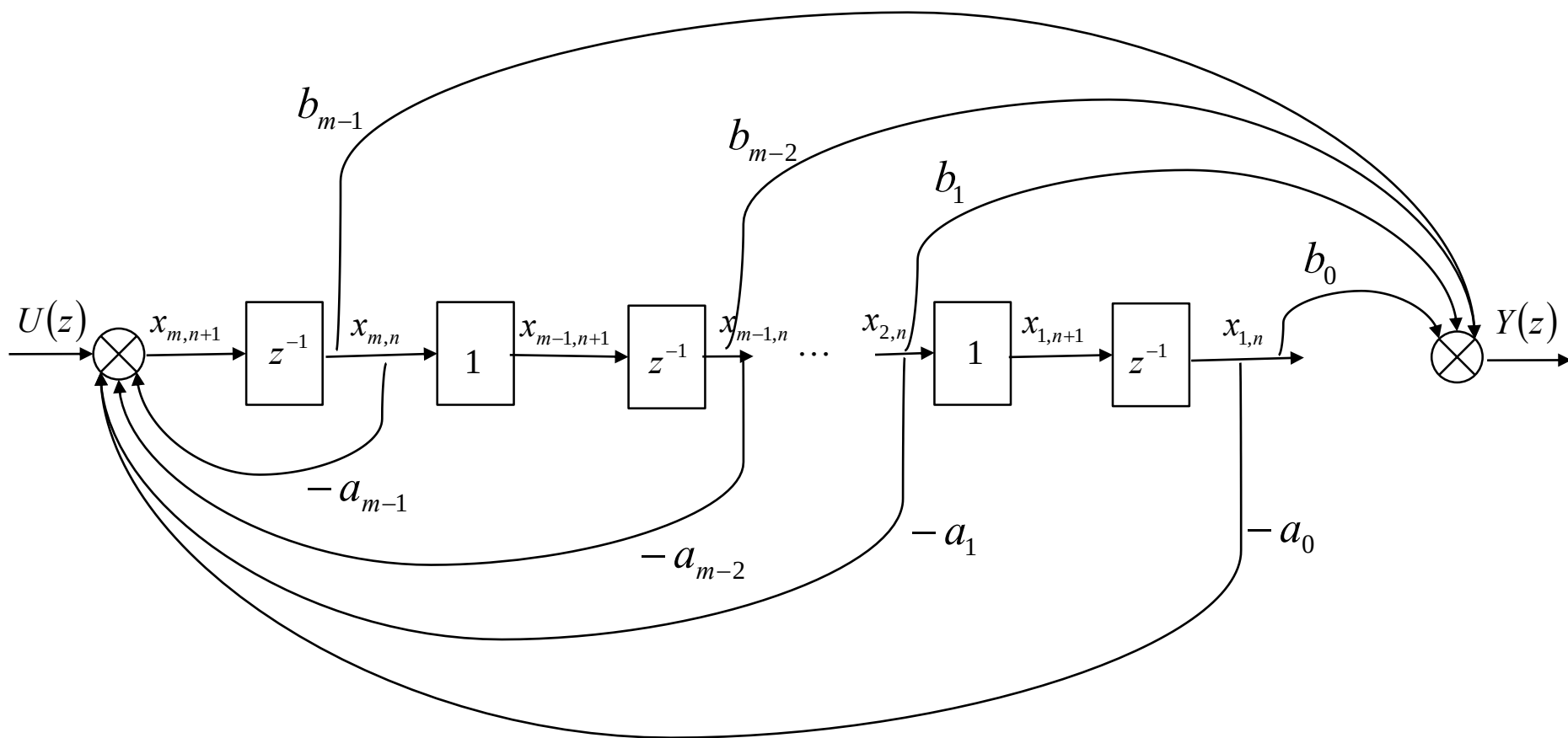
$$Y(z) = K(z)U(z) = (b_{m-1}z^{-1} + b_{m-2}z^{-2} + \dots + b_1z^{1-m} + b_0z^{-m})E(z)$$



$$E(z) = U(z) - (a_{m-1}z^{-1} + a_{m-2}z^{-2} + \dots + a_1z^{1-m} + a_0z^{-m})E(z)$$

Transmitancja $\rightarrow$ Równanie stanu

$$Y(z) = K(z)U(z) = (b_{m-1}z^{-1} + b_{m-2}z^{-2} + \dots + b_1z^{1-m} + b_0z^{-m})E(z)$$



$$E(z) = U(z) - (a_{m-1}z^{-1} + a_{m-2}z^{-2} + \dots + a_1z^{1-m} + a_0z^{-m})E(z)$$

Transmitancja → Równanie stanu

$$x_{1,n+1} = x_{2,n}$$

$$x_{2,n+1} = x_{3,n}$$

$$\vdots$$

$$x_{m-1,n+1} = x_{m,n}$$

$$x_{m,n+1} = -a_0 x_{1,n} - a_1 x_{2,n} - \dots - a_{m-1} x_{m,n} + u_n$$

$$y_n = b_0 x_{1,n} + b_1 x_{2,n} + \dots + b_{m-1} x_{m,n}$$

Transmitancja → Równanie stanu

$$\begin{bmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \\ \vdots \\ x_{m-1,n+1} \\ x_{m,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \vdots \\ x_{m-1,n} \\ x_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_n,$$

$$y_n = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \vdots \\ x_{m-1,n} \\ x_{m,n} \end{bmatrix}$$

Transmitancja → Równanie stanu

$$K(z) = \frac{b_{m-1}z^{m-1} + b_{m-2}z^{m-2} + \dots + b_1z + b_0}{z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_1z + a_0}$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{m-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_n = \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \vdots \\ x_{m-1,n} \\ x_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$C = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{m-1}] \quad D=0$$

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$$

$$y_n = Cx_n$$

∞ Przykład

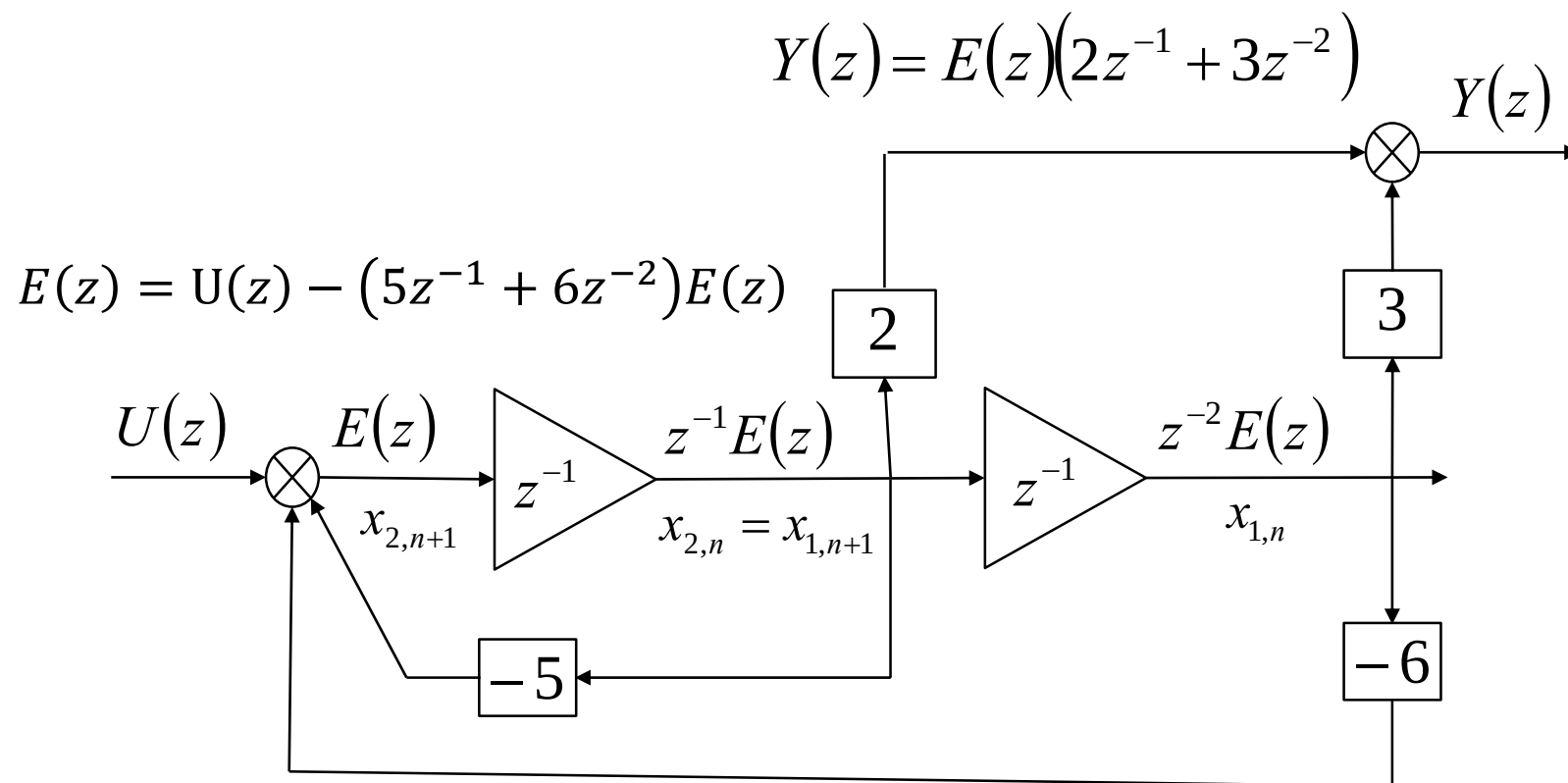
$$K(z) = \frac{2z + 3}{z^2 + 5z + 6} \Big| z^{-2}$$

$$K(z) = \frac{2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 + 5z^{-1} + 6z^{-2}}$$

$$Y(z) = E(z)(2z^{-1} + 3z^{-2})$$

$$E(z) = U(z) - (5z^{-1} + 6z^{-2})E(z)$$

Transmitancja → Równanie stanu

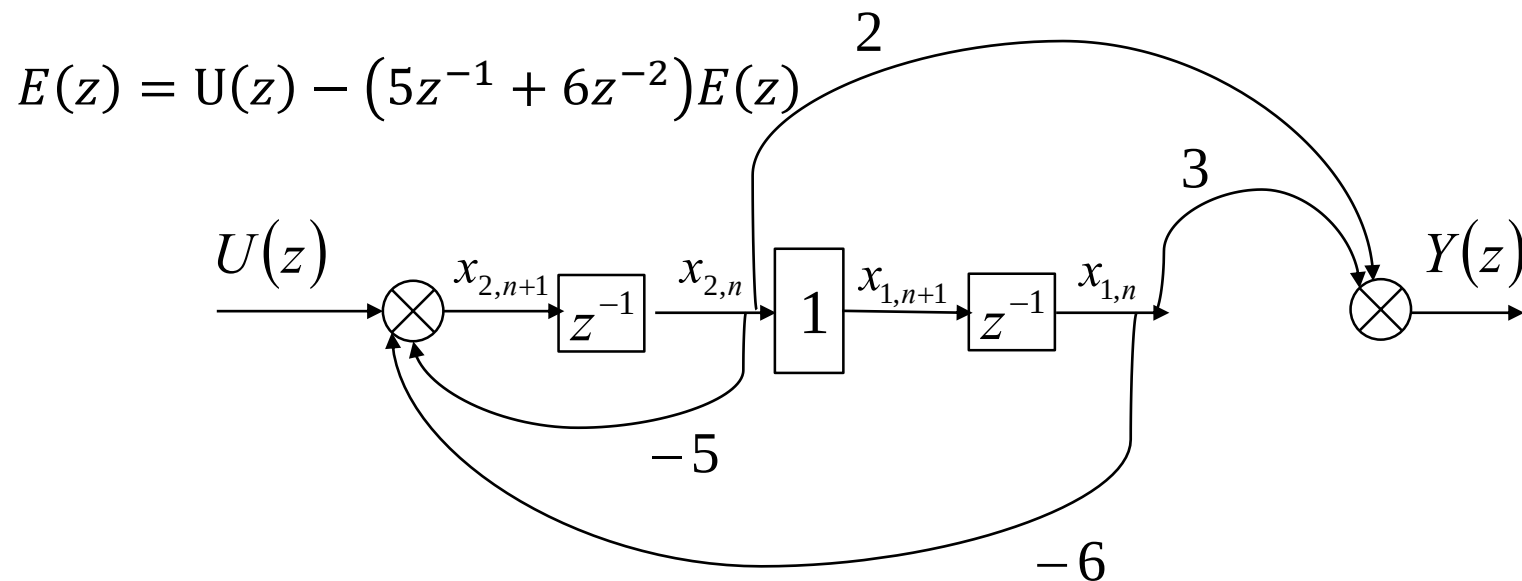


$$x_{1,n+1} = x_{2,n}$$

$$x_{2,n+1} = -6x_{1,n} - 5x_{2,n} + u_n \quad y_n = 3x_{1,n} + 2x_{2,n}$$

Transmitancja $\rightarrow$ Równanie stanu

$$Y(z) = E(z)(2z^{-1} + 3z^{-2})$$



$$x_{1,n+1} = x_{2,n}$$

$$x_{2,n+1} = -6x_{1,n} - 5x_{2,n} + u_n \quad y_n = 3x_{1,n} + 2x_{2,n}$$

Transmitancja $\rightarrow$ Równanie stanu

$$x_{1,n+1} = x_{2,n}$$

$$x_{2,n+1} = -6x_{1,n} - 5x_{2,n} + u_n$$

$$y_n = 3x_{1,n} + 2x_{2,n}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_n$$

$$y_n = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{bmatrix}$$

Transmitancja $\rightarrow$ Równanie stanu

$$K(z) = \frac{2z + 3}{z^2 + 5z + 6}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [3 \quad 2], \quad x_n = \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_n \quad x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$$

$$y_n = [3 \quad 2] \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{bmatrix} \quad y_n = Cx_n$$

Dziękuję za uwagę

