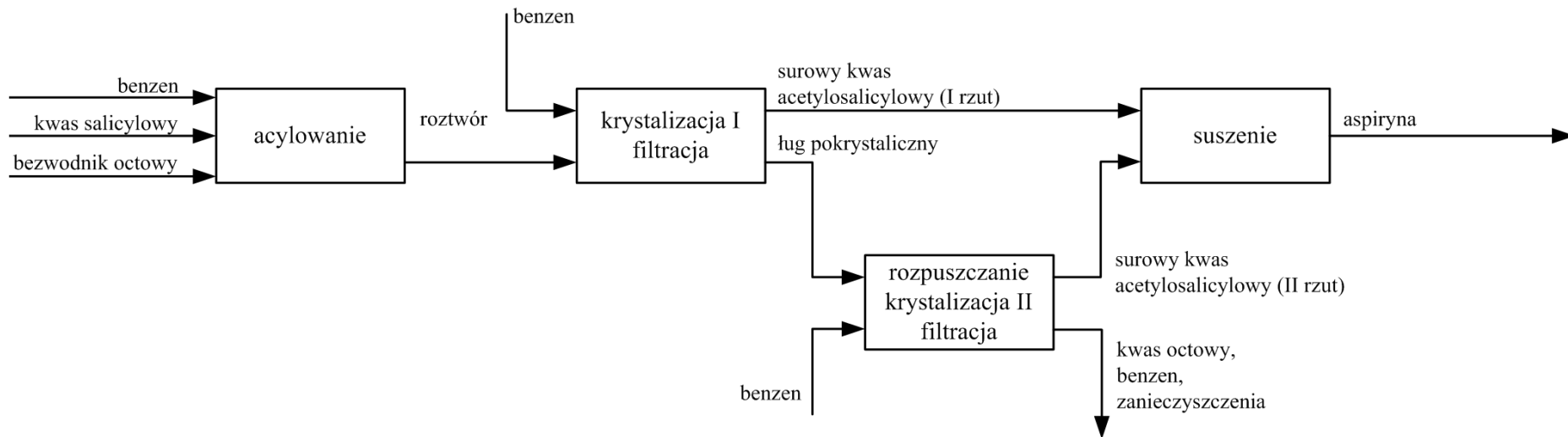


Modele systemów dynamicznych



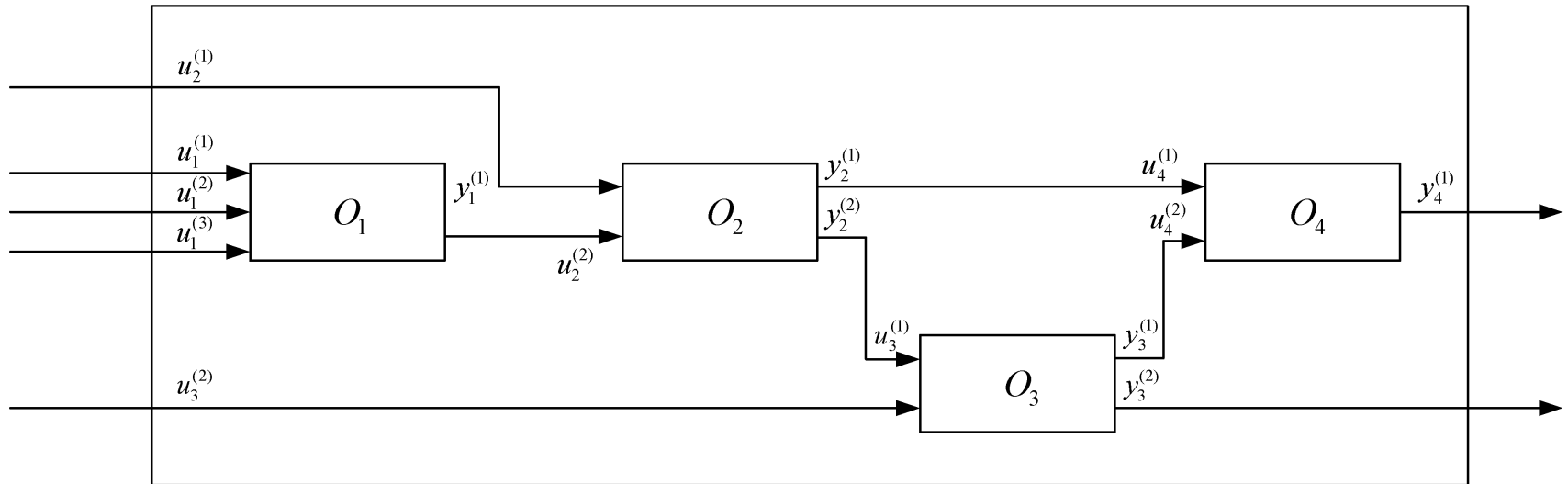
Wykład 3. Typowe opisy obiektów

Elementy (komponenty) systemu - działające części



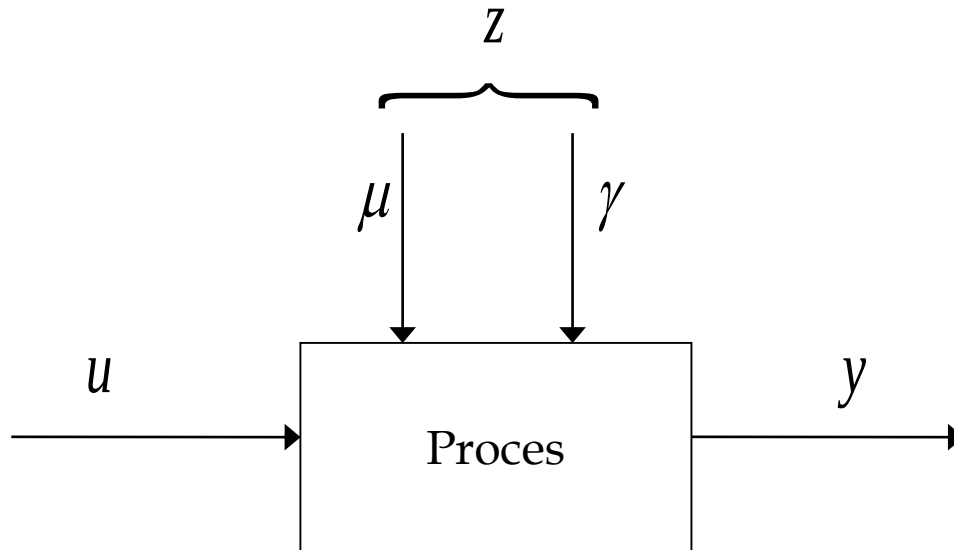
System produkcji aspiryny

Elementy (komponenty) systemu - działające części



Przykład systemu złożonego – produkcja aspiryny

Typowe opisy procesów



u - wejście

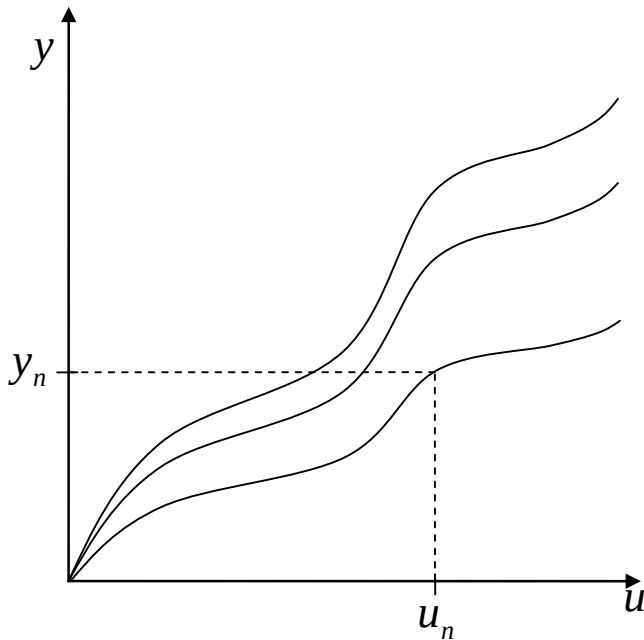
y - wyjście

μ - zakłócenia mierzalne

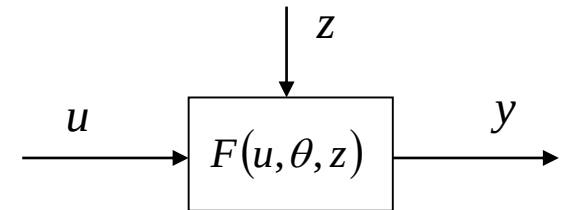
γ - zakłócenia niemierzalne

Typowe opisy charakterystyka statyczna

$$y = F(u, \theta, z)$$



$$y = F(u, \theta, z); \quad z = z_n$$



where:

u - wejście, $u \in U$

y - wyjście, $y \in Y$

z - zakłócenia, $z \in Z$

θ - parametry, $\theta \in \Theta$

Obiekt dynamiczny ciągły



$u(t)$ - Sygnał wejściowy (*ciągły*)

$y(t)$ - Sygnał wyjściowy (*ciągły*)

$x(t)$ - Stan obiektu (*ciągły*)

Typowe opisy zmienne stanu – równania stanu

Przypadek ciągły:

Wektor stanu: $x(t) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(K)}(t) \end{bmatrix}$

Równania stanu:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), u(t)), \quad x(t_0)$$
$$y(t) = G(x(t), u(t))$$

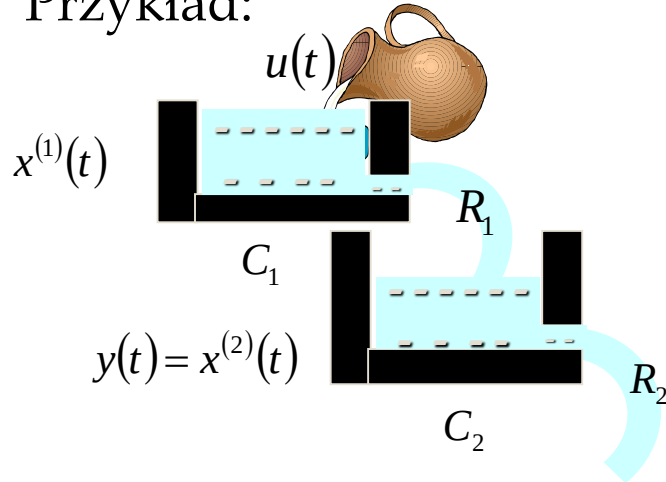
Warunki początkowe:

Przypadek liniowy:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Typowe opisy zmienne stanu

Przykład:



$$\begin{aligned} \Delta x^{(1)}(t) &= \frac{u(t)}{C_1} \Delta t - \frac{x^{(1)}(t)R_1}{C_1} \Delta t \\ \Delta x^{(2)}(t) &= \frac{x^{(1)}(t)R_1}{C_2} \Delta t - \frac{x^{(2)}(t)R_2}{C_2} \Delta t \end{aligned} \quad \Bigg| : \Delta t$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x^{(1)}(t)}{\Delta t} &= \frac{u(t)}{C_1} - \frac{x^{(1)}(t)R_1}{C_1} \\ \frac{\Delta x^{(2)}(t)}{\Delta t} &= \frac{x^{(1)}(t)R_1}{C_2} - \frac{x^{(2)}(t)R_2}{C_2} \end{aligned} \quad \Bigg| \lim_{t \leftrightarrow \infty} \Delta t = 0$$

Równania stanu:

where

C_1, C_2 - powierzchnia zbiornika

R_1, R_2 - odwrotność oporu przepływu

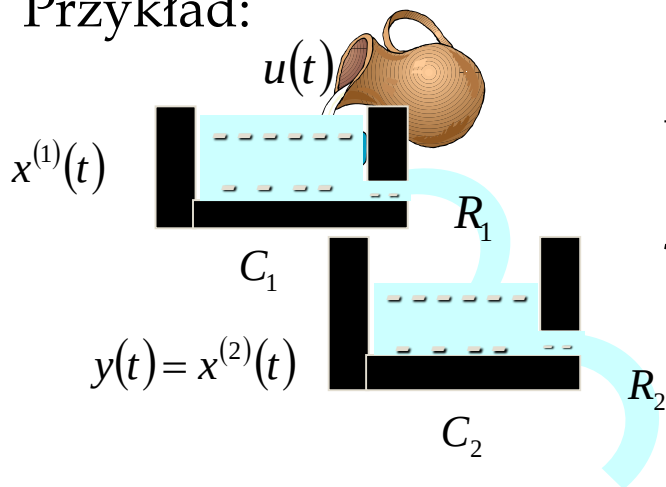
$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = -\frac{x^{(1)}(t)R_1}{C_1} + \frac{u(t)}{C_1}$$

$$\frac{dx^{(2)}(t)}{dt} = \frac{x^{(1)}(t)R_1}{C_2} - \frac{x^{(2)}(t)R_2}{C_2}$$

$$y(t) = x^{(2)}(t)$$

Typowe opisy zmienne stanu

Przykład:



where:

C_1, C_2 - powierzchnia zbiornika

R_1, R_2 - odwrotność oporu przepływu

Ogólna postać równań stanu:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{C_1} & 0 \\ \frac{R_1}{C_2} & -\frac{R_2}{C_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t) \quad C = [0 \quad 1]$$

Równania stanu:

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = -\frac{R_1}{C_1} x^{(1)}(t) + \frac{1}{C_1} u(t)$$

$$\frac{dx^{(2)}(t)}{dt} = \frac{R_1}{C_2} x^{(1)}(t) - \frac{R_2}{C_2} x^{(2)}(t)$$

$$y(t) = x^{(2)}(t)$$

Typowe opisy zmienne stanu – równania stanu

Przypadek ciągły:

Wektor stanu: $x(t) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(K)}(t) \end{bmatrix}$

Równania stanu:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), u(t)), \quad x(t_0)$$
$$y(t) = G(x(t), u(t))$$

Warunki początkowe:

Przypadek liniowy:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Obiekt dynamiczny ciągły



$u(t)$ - Sygnał wejściowy (*ciągły*)

$y(t)$ - Sygnał wyjściowy (*ciągły*)

Typowe opisy równania różniczkowe

Równanie różniczkowe:

$$F\left(\frac{d^m y(t)}{dt^m}, \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}}, \dots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t); \frac{d^v u(t)}{dt^v}, \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}}, \dots, \frac{du(t)}{dt}, u(t)\right) = 0 \quad \text{Warunki początkowe}$$

Linowe równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned} \frac{d^m y(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) &= \\ = b_v \frac{d^v u(t)}{dt^v} + b_{v-1} \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} m \geq v \\ \text{Warunki początkowe} \end{array}$$

Typowe opisy zmienne stanu

Równania stanu:

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = -\frac{x^{(1)}(t)R_1}{C_1} + \frac{u(t)}{C_1} \quad (1)$$

$$\frac{dx^{(2)}(t)}{dt} = \frac{x^{(1)}(t)R_1}{C_2} - \frac{x^{(2)}(t)R_2}{C_2} \quad (2)$$

$$y(t) = x^{(2)}(t) \quad (3)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{R_1}{C_2}x^{(1)}(t) - \frac{R_2}{C_2}y(t) \quad (2)$$

$$\frac{R_1}{C_2}x^{(1)}(t) = \frac{dy(t)}{dt} + \frac{R_2}{C_2}y(t) \quad (2) \quad \Bigg| \times \frac{C_2}{R_1}$$

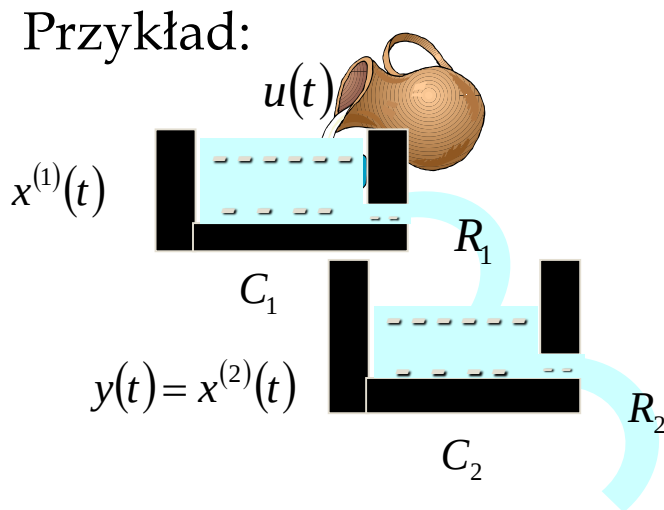
$$x^{(1)}(t) = \frac{C_2}{R_1} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) \frac{R_2}{R_1} \quad (2)$$

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = \frac{C_2}{R_1} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{R_1} \frac{dy(t)}{dt} \quad (2)$$

where

C_1, C_2 - powierzchnia zbiornika

R_1, R_2 - odwrotność oporu przepływu



$$\frac{C_2}{R_1} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{R_1} \frac{dy(t)}{dt} = -\frac{R_1}{C_1} \left(\frac{C_2}{R_1} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{u(t)}{C_1} \quad (1)$$

$$\frac{C_2}{R_1} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{R_1} \frac{dy(t)}{dt} = -\frac{R_1}{C_1} \left(\frac{C_2}{R_1} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{u(t)}{C_1} \quad (1) \quad / \times \frac{R_1}{C_2}$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{C_2} \frac{dy(t)}{dt} = -\frac{R_1}{C_1} \left(\frac{dy(t)}{dt} + \frac{R_2}{C_2} y(t) \right) + \frac{R_1}{C_1 C_2} u(t) \quad (1)$$

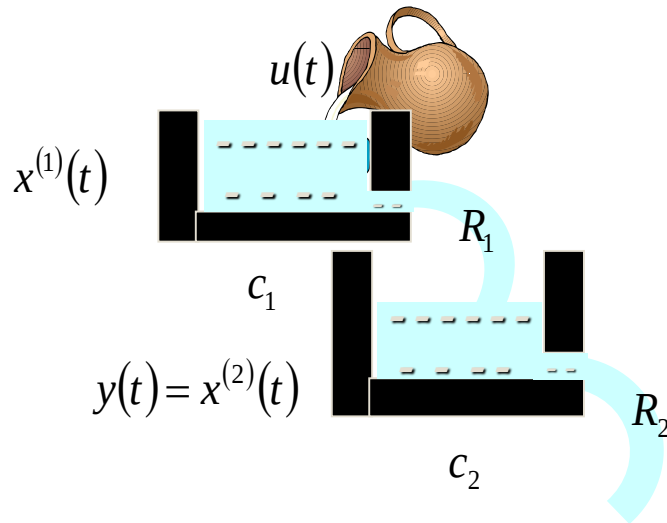
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{C_2} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{R_1}{C_1} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{R_1 R_2}{C_1 C_2} y(t) = \frac{R_1}{C_1 C_2} u(t) \quad (1)$$

Typowe opisy

Równania różniczkowe

Przykład:

Linowe równanie różniczkowe dla danego przykładu:



$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \left(\frac{R_2}{C_2} + \frac{R_1}{C_1} \right) \frac{dy(t)}{dt} + \frac{R_1 R_2}{C_1 C_2} y(t) = \frac{R_1}{C_1 C_2} u(t)$$

gdzie:

C_1, C_2 - powierzchnia zbiorników

R_1, R_2 - odwrotność oporu przepływu

Typowe opisy równania różniczkowe

Równanie różniczkowe:

$$F\left(\frac{d^m y(t)}{dt^m}, \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}}, \dots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t); \frac{d^v u(t)}{dt^v}, \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}}, \dots, \frac{du(t)}{dt}, u(t)\right) = 0 \quad \text{Warunki początkowe}$$

Liniowe równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned} \frac{d^m y(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) &= \\ = b_v \frac{d^v u(t)}{dt^v} + b_{v-1} \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} m \geq v \\ \text{Warunki początkowe} \end{array}$$

Obiekt dynamiczny ciągły



$u(t)$ $U(s)$ - Sygnał wejściowy (*ciągły*)

$y(t)$ $Y(s)$ - Sygnał wyjściowy (*ciągły*)

Typowe opisy transmitancja

Transmitancja: $K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ $K(s) = \frac{b_v s^v + b_{v-1} s^{v-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m \geq v$

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^m y(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \right] = \mathcal{L} \left[b_v \frac{d^v u(t)}{dt^v} + b_{v-1} \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + a_0 u(t) \right]$$

Zerowe warunki początkowe

$$Y(s) (s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0) = U(s) (b_v s^v + b_{v-1} s^{v-1} + \dots + b_1 s + b_0)$$

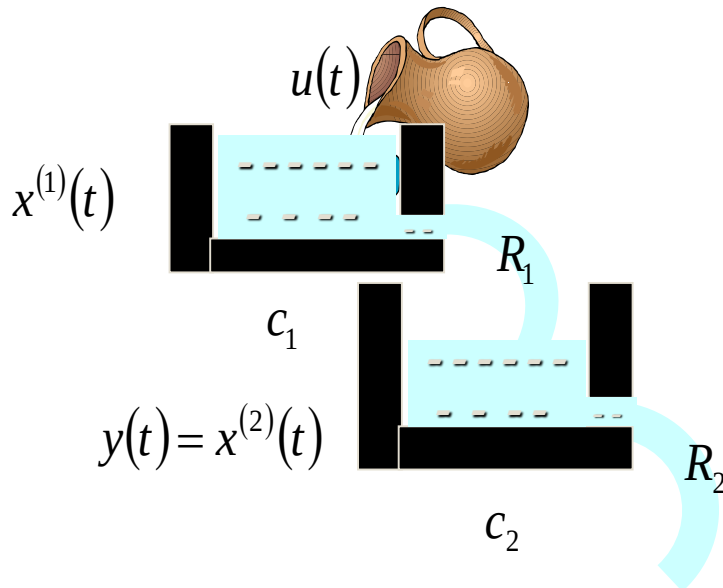
Typowe opisy transmitancja

Przykład:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \left(\frac{R_2}{C_2} + \frac{R_1}{C_1} \right) \frac{dy(t)}{dt} + \frac{R_1 R_2}{C_1 C_2} y(t) = \frac{R_1}{C_1 C_2} u(t)$$

Transmitancja:

$$K(s) = \frac{\frac{R_1}{C_1 C_2}}{s^2 + \left(\frac{R_2}{C_2} + \frac{R_1}{C_1} \right) s + \frac{R_1 R_2}{C_1 C_2}}$$



$$K(s) = \frac{\frac{1}{R_2}}{\left(\frac{C_1}{R_1} s + 1 \right) \left(\frac{C_2}{R_2} s + 1 \right)} = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

gdzie: $k = \frac{1}{R_2}$ - współczynnik wzmocnienia,

$T_1 = \frac{C_1}{R_1}, T_2 = \frac{C_2}{R_2}$ - stałe czasowe

Typowe opisy odpowieź impulsowa

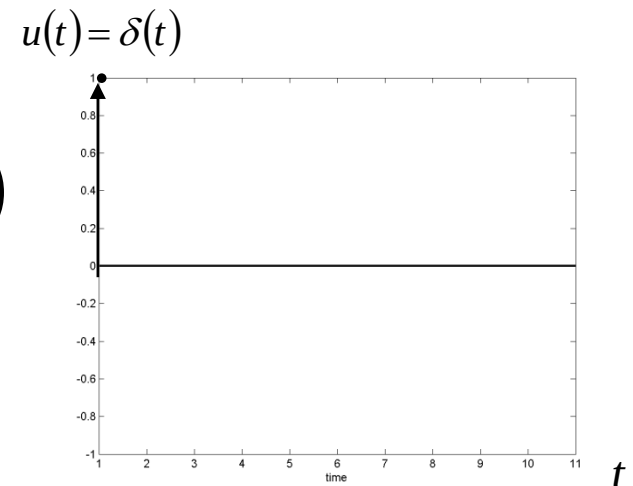
Odpowiedź impulsowa

Transmitancja: $K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

gdzie: $Y(s) = K(s)U(s)$

$$U(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

oraz: $\delta(t)$ delta Dirac'a.



Odpowiedź impulsowa: $k_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)]$

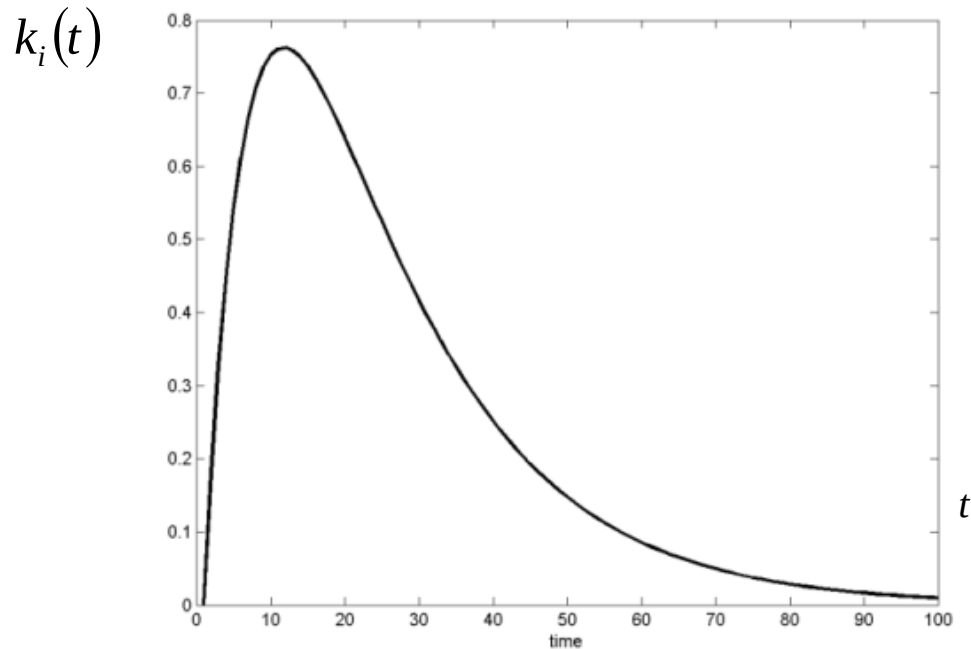
Delta Dirac'a

Typowe opisy odpowieź impulsowa

Przykład:

Odpowiedź impulsowa:

$$k_i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \right] = k \left(\frac{1}{T_1 - T_2} (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}) \right) \mathbf{1}(t) \quad T_1 \neq T_2$$



Typowe opisy odpowieź na skok jednostkowy

Odpowiedź na skok jednostkowy

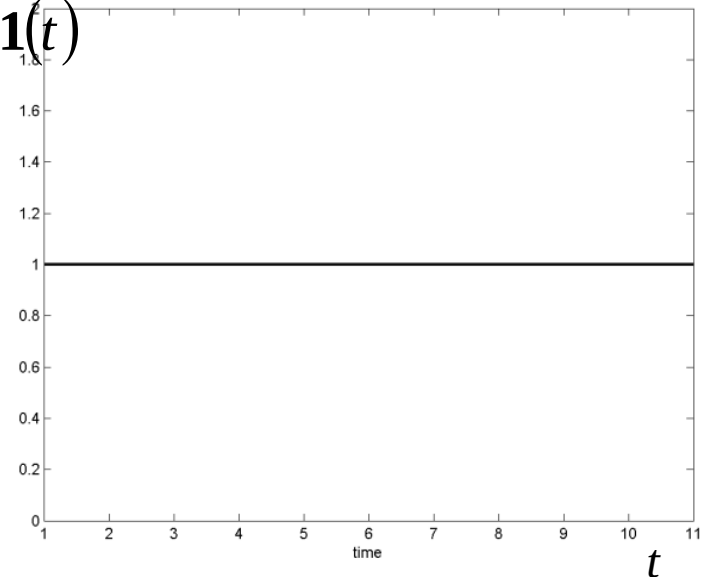
Transmitancja: $K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ $u(t) = \mathbf{1}(t)$

$$Y(s) = K(s)U(s)$$

gdzie:

$$U(s) = \mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s}$$

oraz: $\mathbf{1}(t)$ jest skokiem jednostkowym.



Odpowiedź na skok
jednostkowy:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K(s)}{s}\right]$$

Skok jednostkowy

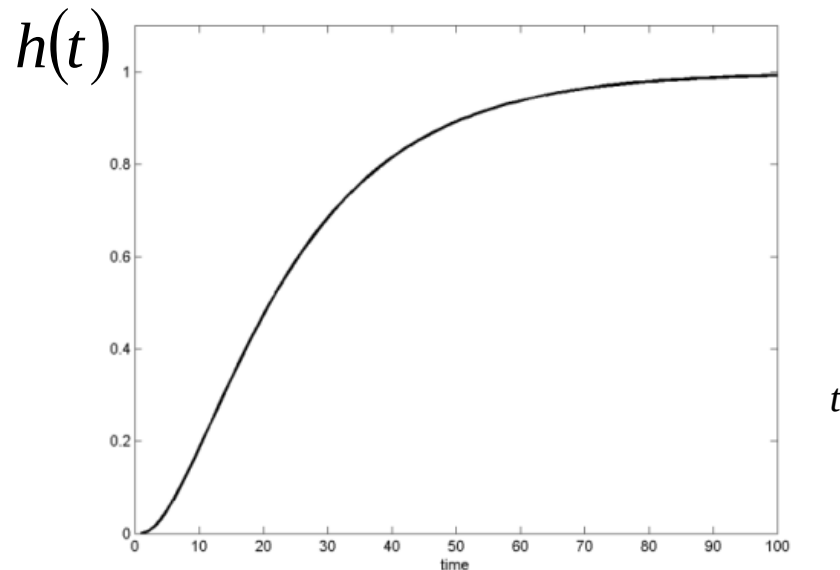
Typowe opisy

odpowieź na skok jednostkowy

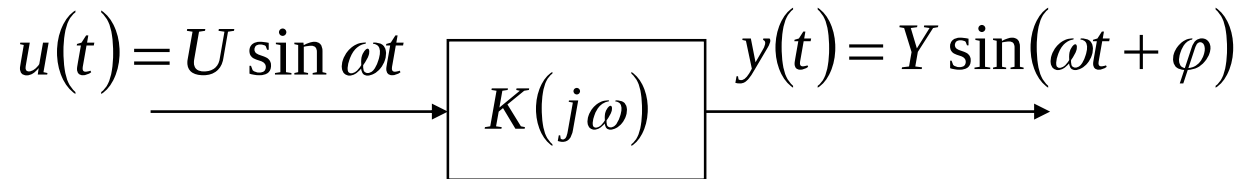
Przykład:

Odpowiedź na skok jednostkowy:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \frac{1}{s} \right] = k \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right) \mathbf{1}(t) \quad T_1 \neq T_2$$



Transmitancja widmowa – charakterystyki częstotliwościowe



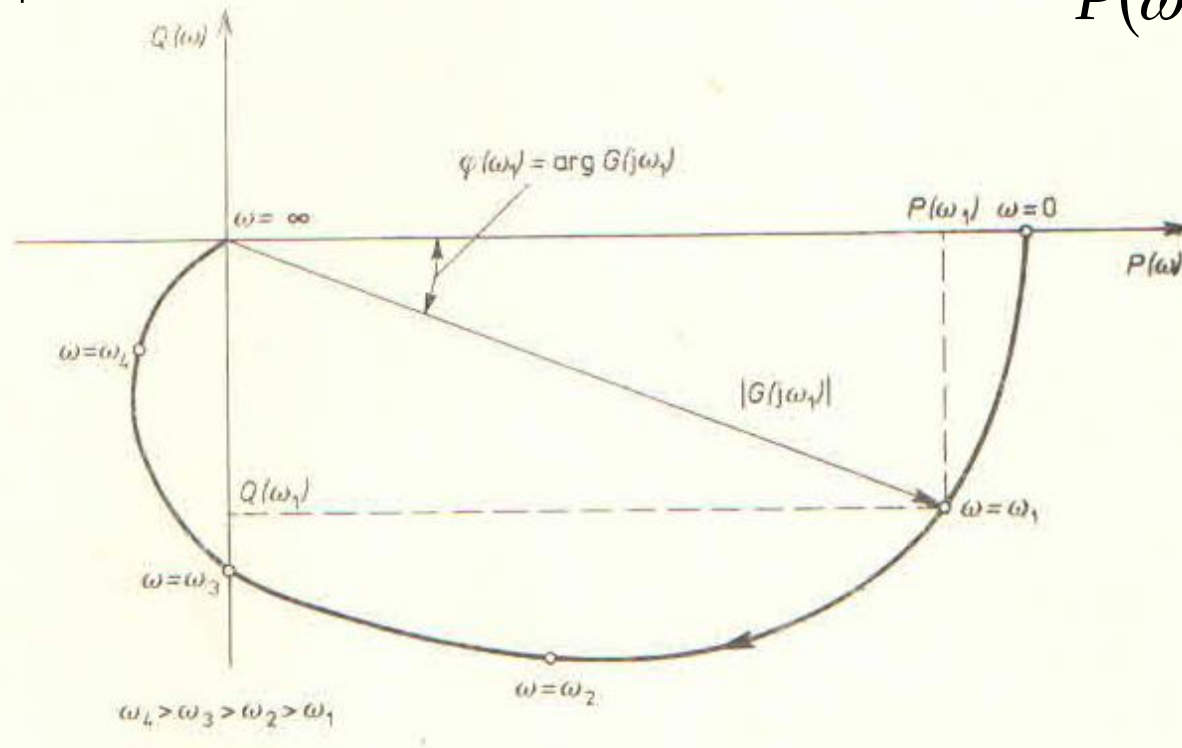
$$K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = K(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$K(j\omega) = \operatorname{Re}[K(j\omega)] + j \operatorname{Im}[K(j\omega)] = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$|K(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \qquad \operatorname{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

$$K(j\omega) = \operatorname{Re}[K(j\omega)] + j \operatorname{Im}[K(j\omega)] = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$|K(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \qquad \operatorname{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$



Obiekt dynamiczny dyskretny



u_n - Sygnał wejściowy(*dyskretny*)

y_n - Sygnał wyjściowy(*dyskretny*)

x_n - Stan obiektu (*dyskretny*)

Typowe opisy

zmienne stanu – równania stanu

Przypadek dyskretny:

Wektor stanu: $x_n = \begin{bmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(K)} \end{bmatrix}$

Przykład:



$$x_{n+1} = (x_n + u_n) \bmod 2$$

$$y_n = x_n$$

$$x_n \in \{0,1\}, \quad u_n \in \{0,1\}$$

<http://www.freeclipartisland.com/>

Równania stanu:

$$x_{n+1} = F(x_n, u_n)$$

$$y_n = G(x_n, u_n)$$



$$x_{n+1} = x_n + \alpha \cdot x_n + u_n$$

$$y_n = x_n$$

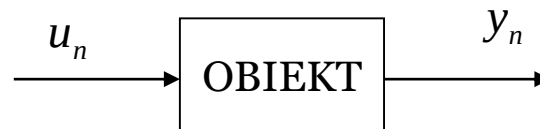
gdzie:

α - stopa procentowa

Rachunek bankowy

<http://www.freeclipartisland.com/>

Obiekt dynamiczny dyskretny



u_n - Sygnał wejściowy(*dyskretny*)

y_n - Sygnał wyjściowy(*dyskretny*)

Typowe opisy równania różnicowe

Równanie różnicowe:

$$F(y_{n+m}, y_{n+m-1}, \dots, y_n; u_{n+v}, u_{n+v-1}, \dots, u_n) = 0$$

Liniowe równane różnicowe:

$$y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + \dots + a_0y_n = b_v u_{n+v} + b_{v-1}u_{n+v-1} + \dots + b_0u_n$$

Przykład:



$$y_{n+1} = (y_n + u_n) \bmod 2$$

$$y_n \in \{0,1\}, \quad u_n \in \{0,1\}$$



$$y_{n+1} = (1 + \alpha)y_n + u_n$$

Rachunek bankowy

Obiekt dynamiczny dyskretny



u_n $U(z)$ - Sygnał wejściowy(*dyskretny*)

y_n $Y(z)$ - Sygnał wyjściowy(*dyskretny*)

Typowe opisy

Transmitancja

Transmitancja:

$$K(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$K(z) = \frac{b_v z^v + b_{v-1} z^{v-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0}, \quad m > v$$

$$\mathcal{Z}[y_{n+m} + a_{m-1} y_{n+m-1} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n] = \mathcal{Z}[b_v u_{n+v} + b_{v-1} u_{n+v-1} + \dots + b_1 u_{n+1} + a_0 u_n]$$

$$Y(z)(z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0) = U(z)(b_v z^v + b_{v-1} z^{v-1} + \dots + b_1 z + b_0)$$

Przykład:

$$K(z) = \frac{1}{(z - (1 + \alpha))}$$



Rachunek bankowy

<http://www.freeclipartisland.com/>

Typowe opisy

dyskretna odpowiedź impulsowa

Dyskretna odpowiedź impulsowa
Transmitancja: $K(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$

$$Y(z) = K(z)U(z)$$

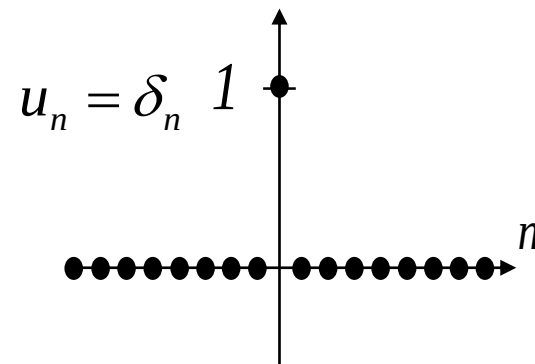
gdzie:

$$U(z) = \mathcal{Z}[\delta_n] = 1$$

oraz: δ_n delta Kroneker'a.

Dyskretna odpowiedź impulsowa:

$$k_{in} = \mathcal{Z}^{-1}[K(z)]$$



Delta Kroneker'a

Typowe opisy

dyskretna odpowiedź na skok jednostkowy

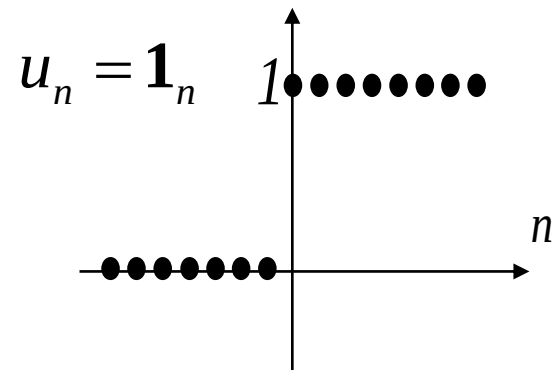
Odpowiedź na skok jednostkowy

Transmitancja:
$$K(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$Y(z) = K(z)U(z)$$

gdzie:

$$U(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{1}_n] = \frac{z}{z-1}$$



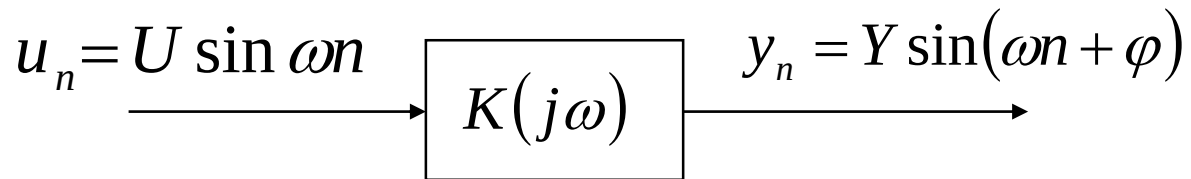
oraz: $\mathbf{1}_n$ dyskretny skok jednostkowy.

Dyskretny skok
jednostkowy

Odpowiedź na skok jednostkowy:

$$h_n = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-1} K(z) \right]$$

Transmitancja widmowa – charakterystyki częstotliwościowe



$$K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = K(z) \Big|_{z=j\omega}$$

$$K(j\omega) = \operatorname{Re}[K(j\omega)] + j \operatorname{Im}[K(j\omega)] = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$|K(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \qquad \operatorname{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

Typowe opisy

Relacja pomiędzy opisami

Przykład:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t) \qquad \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

ZMIENNE STANU

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE/RÓŻNICOWE

$$K(s) = \frac{1}{s+1}$$

TRANSMITANCJA

Typowe opisy

Relacja pomiędzy opisami

Przykład:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t), \quad y(0) = y'(0) = u(0) = 0$$

Transformata Laplace' a:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{du(t)}{dt} + 2u(t)\right]$$

Transmitancja:

$$K(s) = \frac{s+2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s+2}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

Typowe opisy

Relacja pomiędzy opisami

Przykład cd.:

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t), \quad y(0) = 0$$

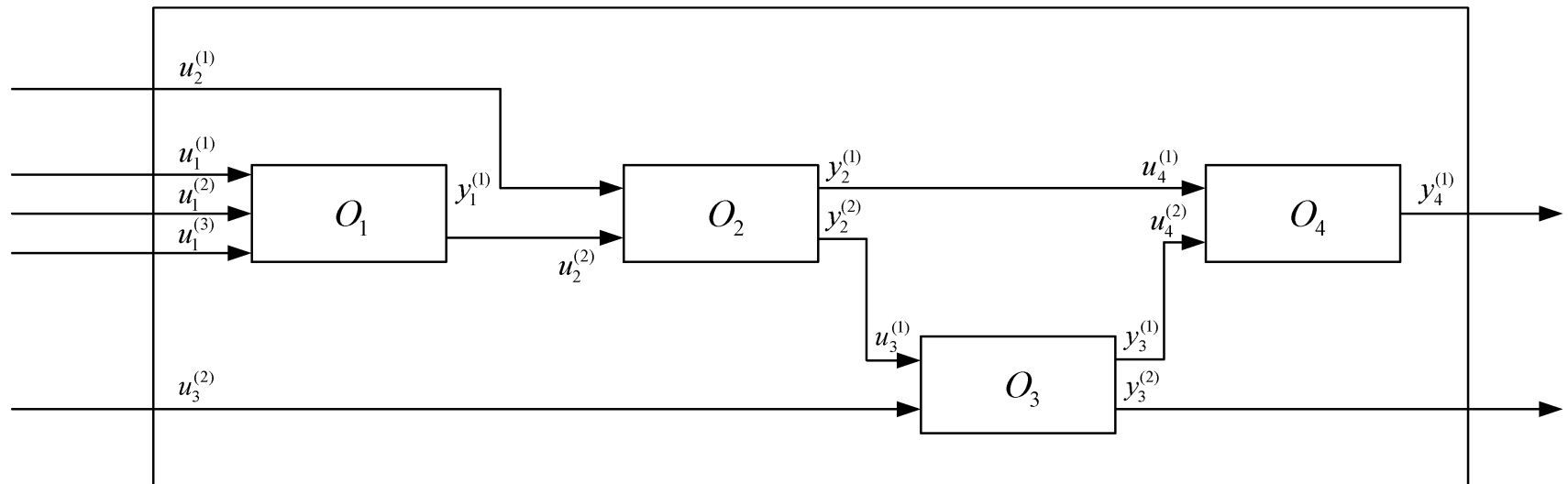
Transformata Laplace'a

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt} + y(t)\right] = \mathcal{L}[u(t)]$$

Transmitancja:

$$K(s) = \frac{1}{s+1}$$

Elementy (komponenty) systemu - działające części



Przykład systemu złożonego – produkcja aspiryny

Dziękuję za uwagę

