

Metody Systemowe i Decyzyjne w Informatyce



Wykład 6. Programowanie liniowe

Zadanie programowania liniowego

Zakład może wytwarzać dwa produkty: P_1 i P_2 . Ich produkcja jest limitowana dostępnymi zasobami trzech środków: S_1 , S_2 , S_3 . Zasoby tych środków wynoszą odpowiednio, 14, 8 i 16 jednostek. Nakład środka S_1 na wytworzenie produktu P_1 wynosi 2 jednostki, a na wytworzenie produktu P_2 - również 2 jednostki. Nakłady środka S_2 wynoszą odpowiednio, 1 i 2 jednostki, natomiast środka S_3 - 4 i 0 jednostek. Zysk osiągany z wytworzenia jednostki produktu P_1 wynosi 2 jednostki, a z wytworzenia jednostki produktu P_2 - 3 jednostki. Należy zaplanować produkcję tak aby maksymalizować zysk.

Zmienne decyzyjne:

x_1, x_2 - planowana wielkość produkcji wyrobu odpowiednio, P_1, P_2 .

Funkcja celu:

$$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

Ograniczenia:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 + 0x_2 \leq 16$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Zadanie programowania liniowego

Funkcja celu:

$$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

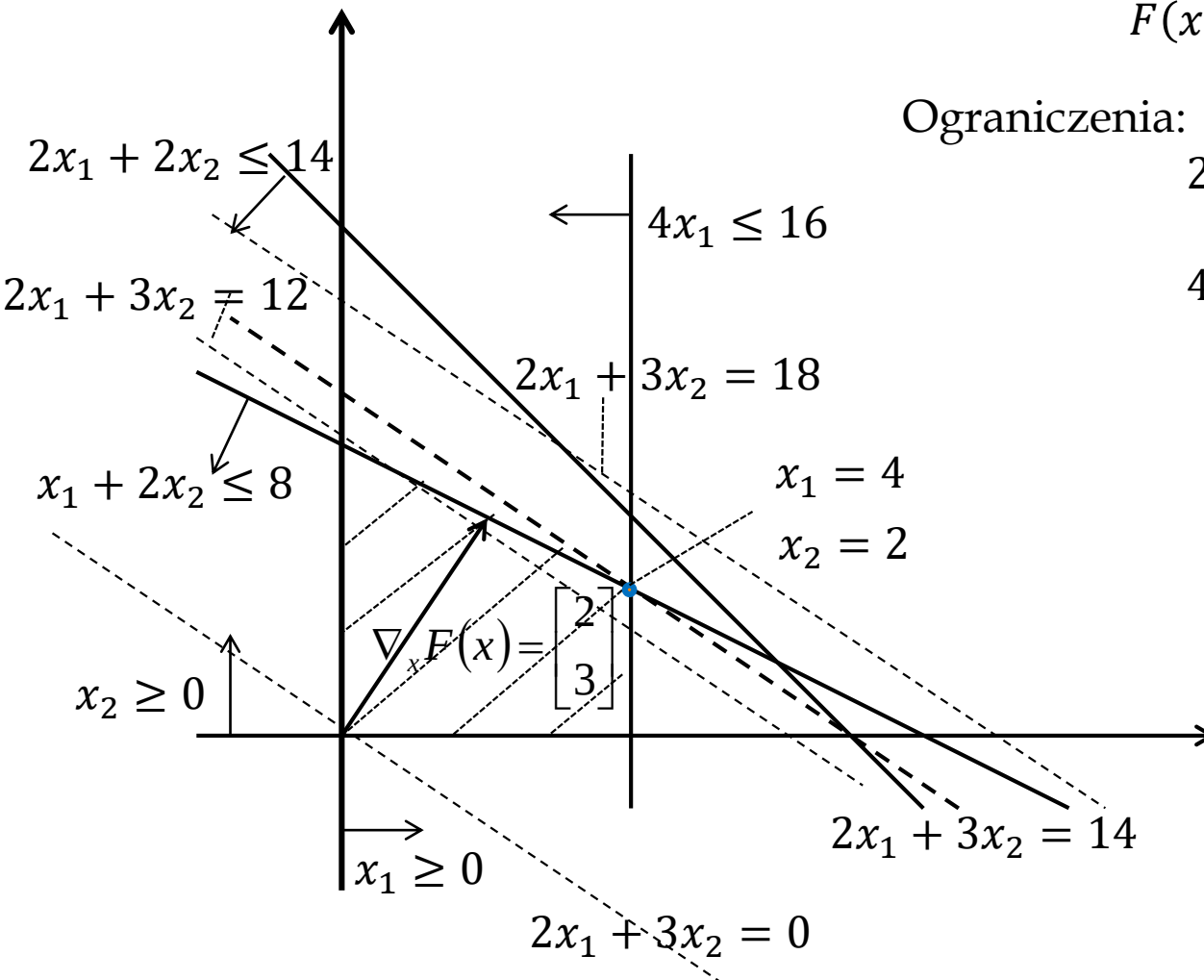
Ograniczenia:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

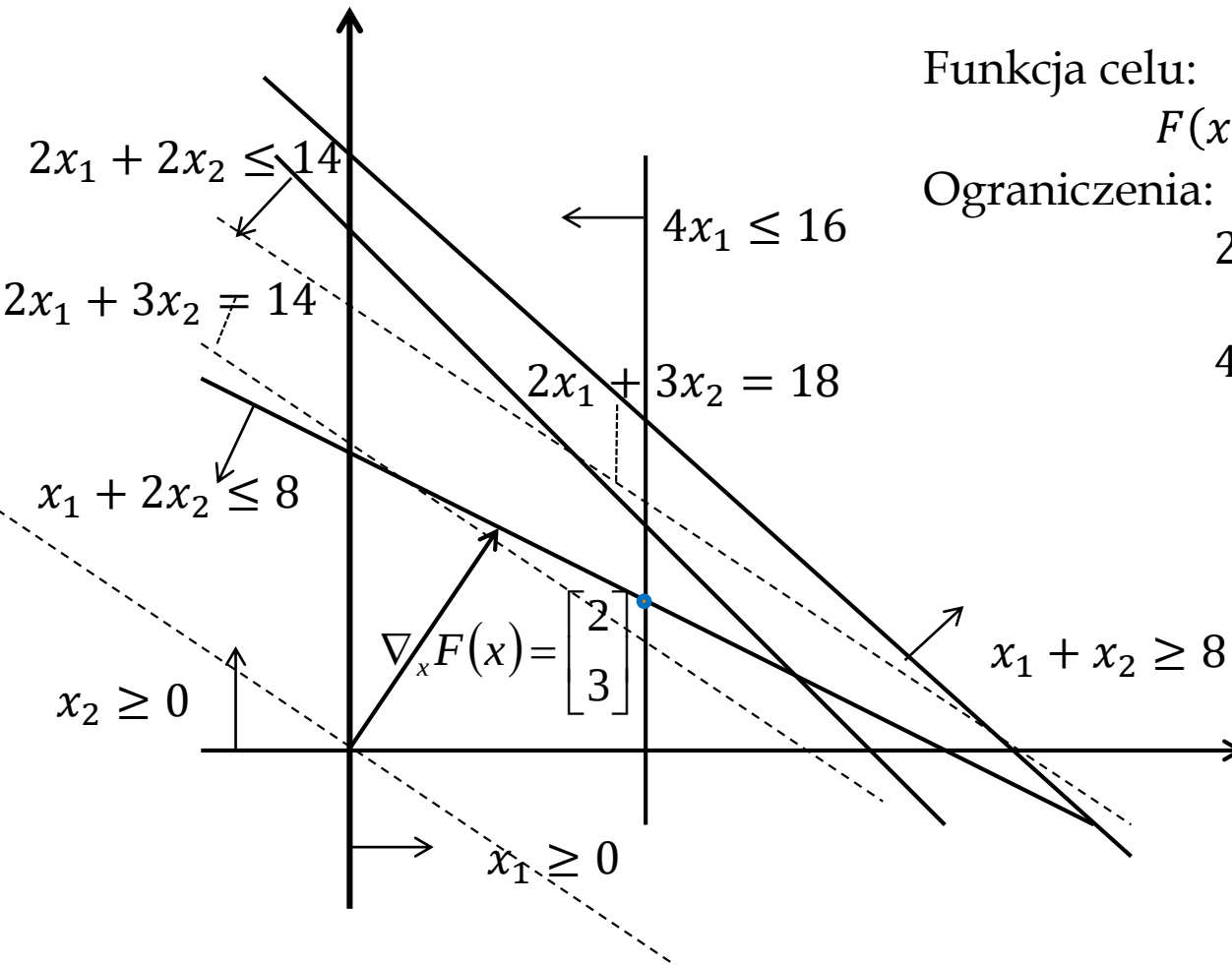
$$4x_1 + 0x_2 \leq 16$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



Zadanie programowania liniowego

Zadanie jak poprzednio, z tym że łączna produkcja nie może być mniejsza niż 8



Funkcja celu:

$$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

Ograniczenia:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 + 0x_2 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

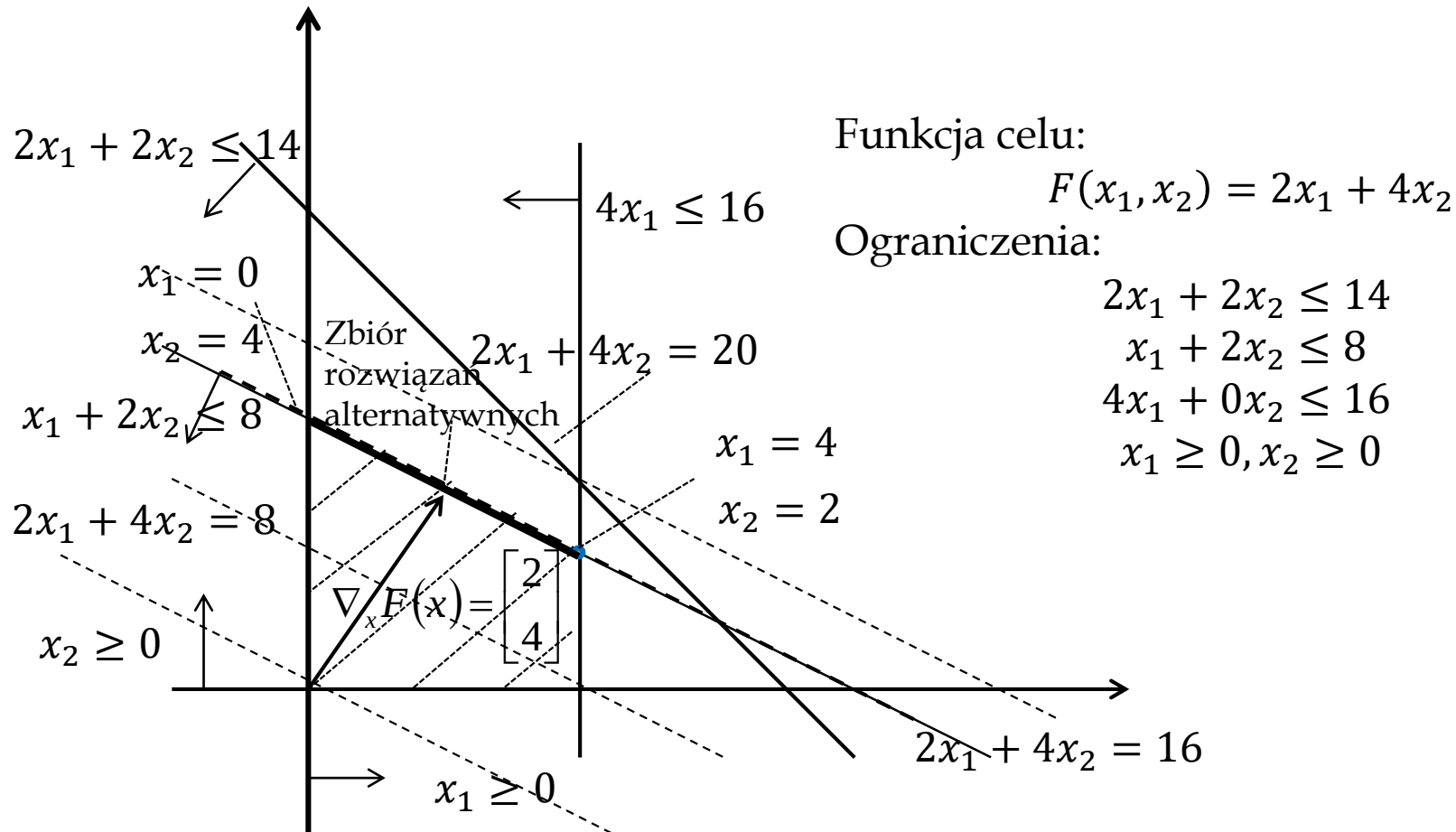
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$D_x = \emptyset$$

Zbiór rozwiązań
dopuszczalnych
jest pusty

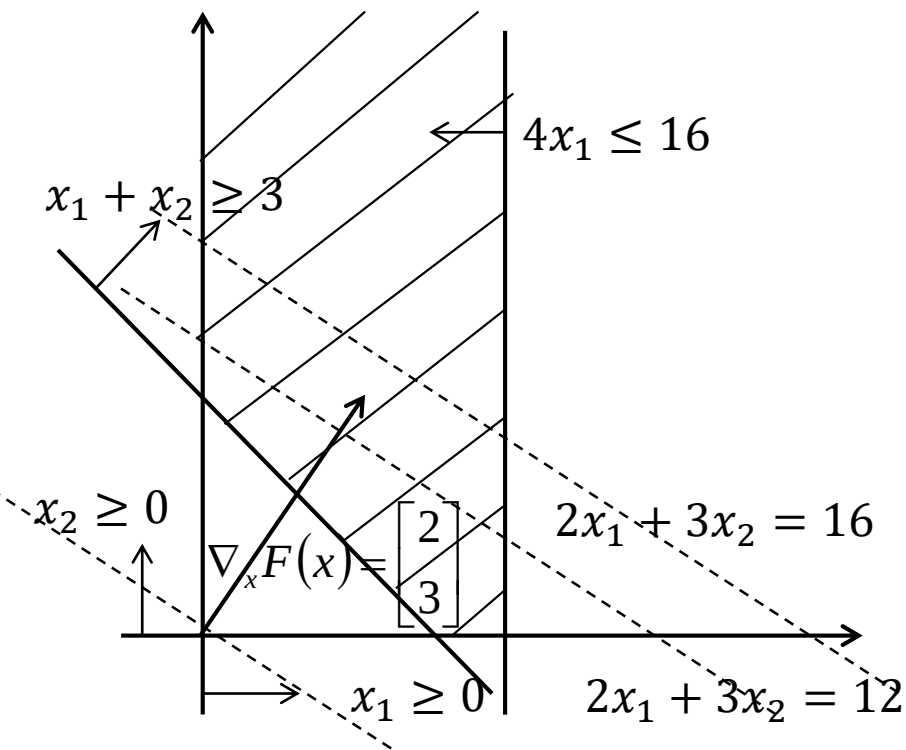
Zadanie programowania liniowego

Zadanie jak na wstępie, z tym że zysk jednostkowy dla produktu P_2 wynosi 4



Zadanie programowania liniowego

Rozważmy problem planowania produkcji, w którym występuje jedynie ograniczenie dotyczące środka S_3 (jego zużycie nie może przekraczać 16 jednostek) oraz sformułowano dolne ograniczenie na łączną wielkość produkcji, która nie może być mniejsza od 3 jednostek. Zysk z poszczególnych produktów jak poprzednio.



Funkcja celu:

$$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

Ograniczenia:

$$4x_1 + 0x_2 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Rozwiązanie nieograniczone

Zadanie programowania liniowego

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^S, \varphi_l(x) = 0, l = 1, 2, \dots, L, \psi_m(x) \leq 0, m = 1, 2, \dots, M, x^{(s)} \geq 0 \quad s = 1, 2, \dots, S\}$$

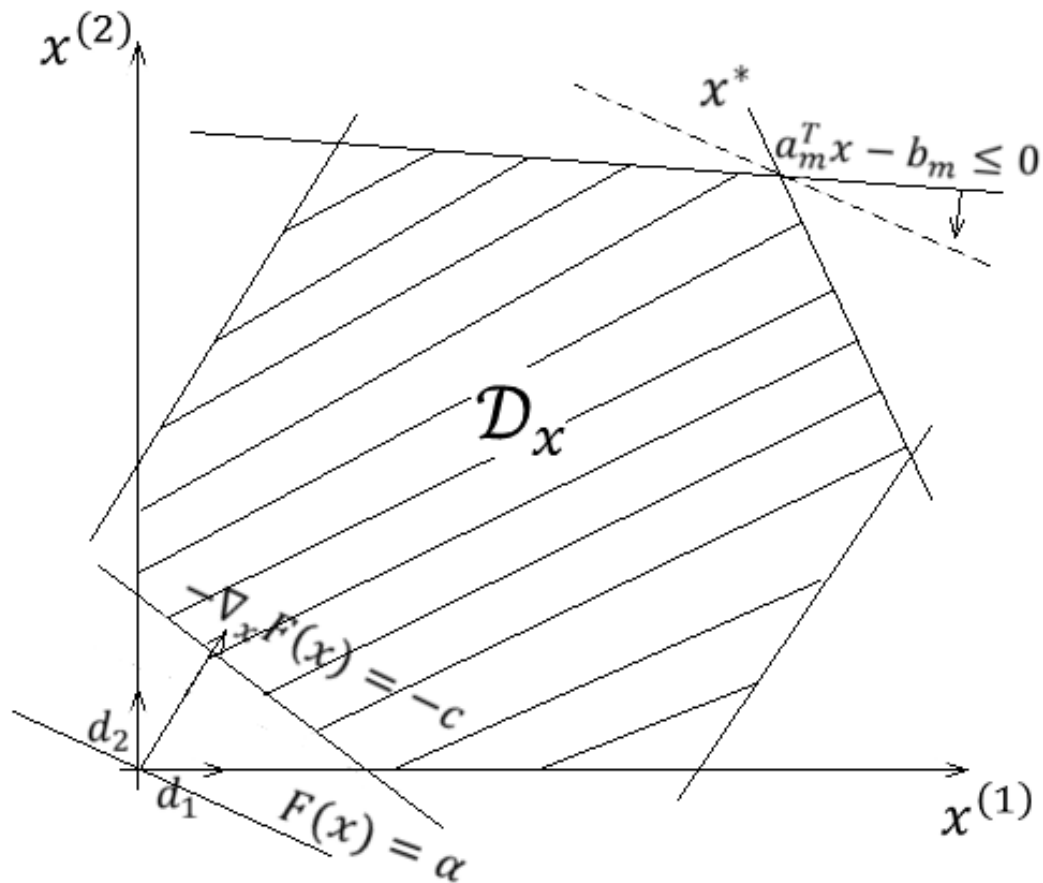
$$F(x) = c^T x = \sum_{s=1}^S c_s x^{(s)}$$

$$\varphi_l(x) = a_l^T x - b_l = \sum_{s=1}^S a_{ls} x^{(s)} - b_l = 0 \quad l = 1, 2, \dots, L$$

$$\psi_m(x) = a_m^T x - b_m \leq 0 = \sum_{s=1}^S a_{ms} x^{(s)} - b_m \leq 0 \quad m = 1, 2, \dots, M$$

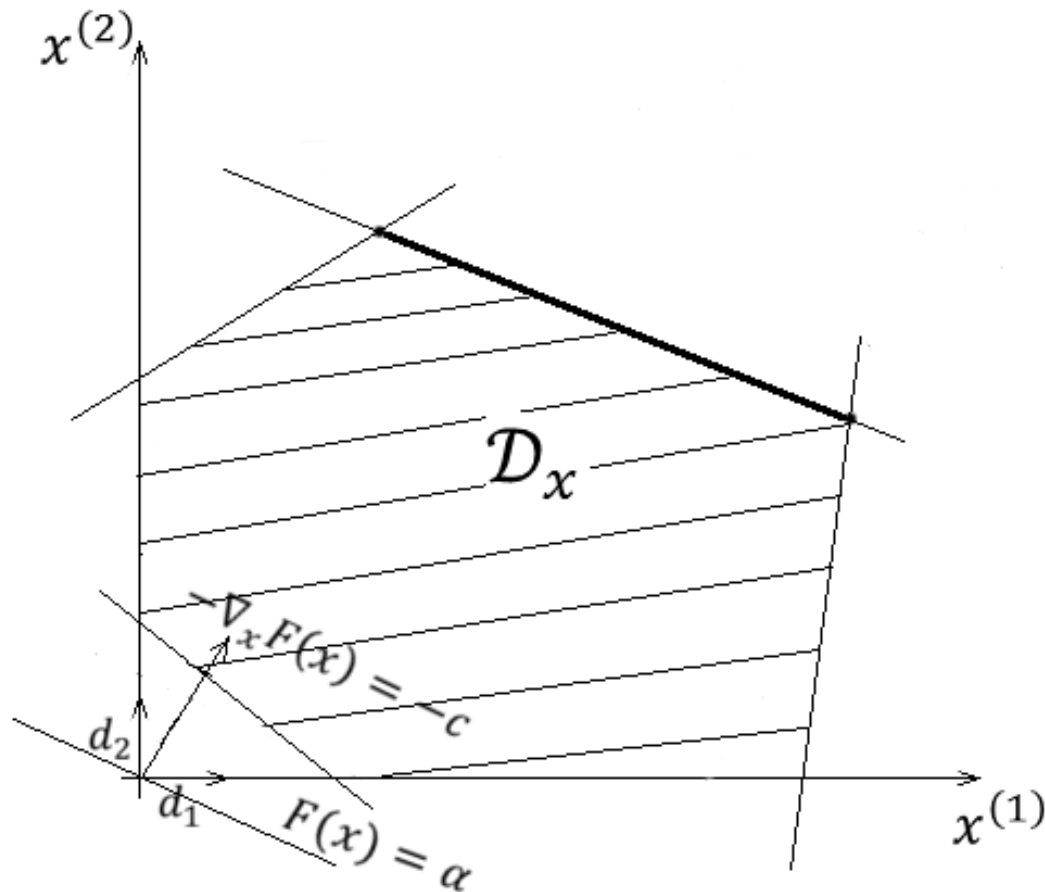
$$x^{(s)} \geq 0 \quad s = 1, 2, \dots, S$$

Interpretacja graficzna



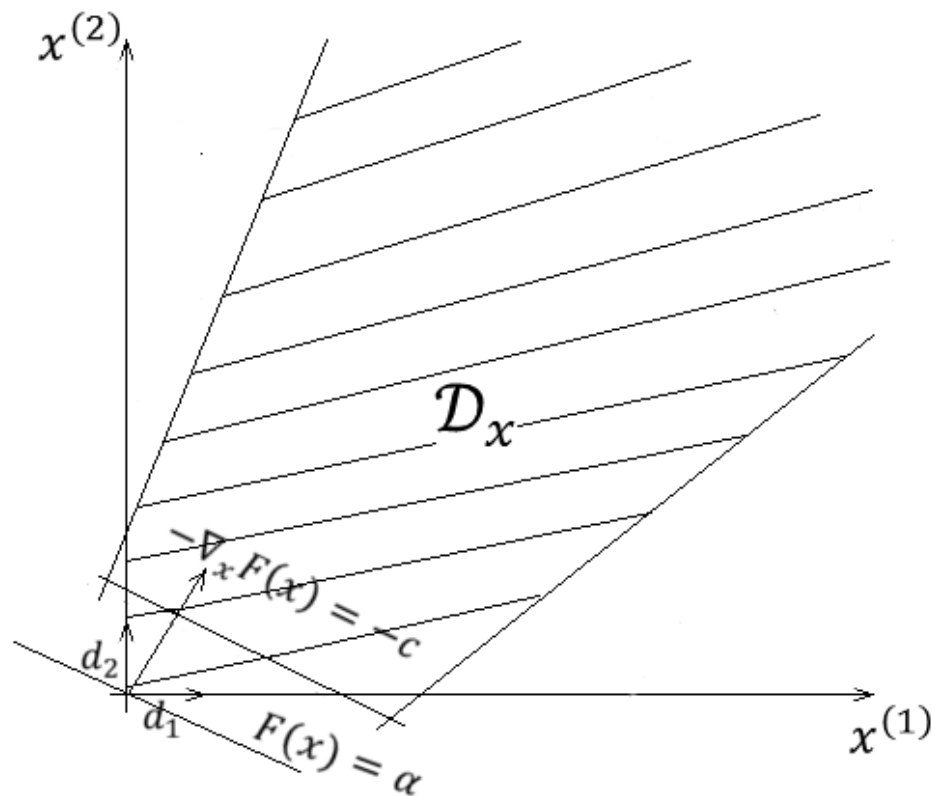
1. Rozwiązanie leży w wierzchołku

Interpretacja graficzna



2. Rozwiązanie leży na odcinku

Interpretacja graficzna



3. Rozwiązanie nieograniczone

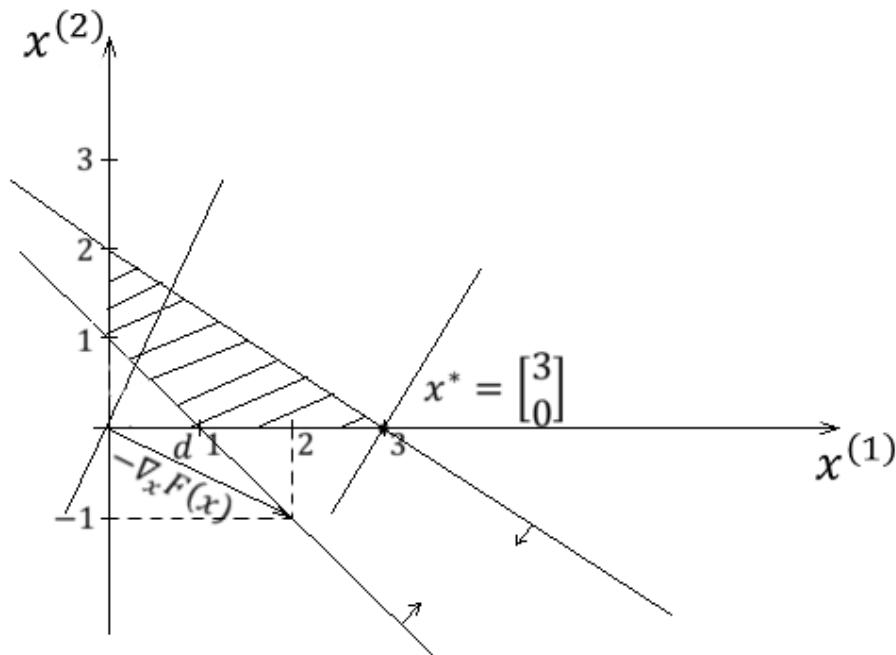
lub

4. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest pusty
t.j.: $\mathcal{D}_x = \emptyset$

Przykład

$$F(x) = -2x^{(1)} + x^{(2)} \leftarrow \min$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^2, \quad -x^{(1)} - x^{(2)} + 1 \leq 0, \quad 2x^{(1)} + 3x^{(2)} - 6 \leq 0, \quad x^{(1)}, x^{(2)} \geq 0\}$$



$$\nabla_x F(x) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad -\nabla_x F(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Postać kanoniczna

$$F(x) = c^T x$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^S, a_l^T x - b_l = 0, l = 1, 2, \dots, L, a_m^T x - b_m \leq 0, m = 1, 2, \dots, M, x^{(s)} \geq 0 \quad s = 1, 2, \dots, S\}$$

Postać kanoniczna

$$A: \mathcal{D}_X = \{x \in R^S, Ax - b = 0_L, x \geq 0_S\}$$

lub

$$B: \mathcal{D}_x = \{x \in R^S, Ax - b \leq 0_L, x \geq 0_S\}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_S \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_L \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(S)} \end{bmatrix}, \quad A_{S \times L} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{L1} & \cdots & a_{LS} \end{bmatrix}$$

Postać kanoniczna

$$B \rightarrow A$$

$$1^\circ \quad a_l^T x - b_l \leq 0 \quad \text{wprowadzamy sztuczną zmienną} \\ x_{s+1} \geq 0$$

$$a_l^T x + x_{s+1} - b_l = 0$$

czyli

$$\bar{a}_l = \begin{bmatrix} a_{L1} \\ \vdots \\ a_{LS} \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{x} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(s)} \\ x^{(s+1)} \end{bmatrix}, \bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F(x) = \bar{c}^T \bar{x}$$

$$\bar{a}_l^T \bar{x} - b_l = 0$$

Postać kanoniczna

$$A \rightarrow B$$

$$2^\circ \quad a_l^T x - b_l = 0 \equiv \begin{cases} a_l^T x - b_l \leq 0 \\ -(a_l^T x - b_l) \leq 0 \end{cases}$$

3° $x^{(s)}$ - nie jest ograniczone

$$x^{(s)} = x^{(s)'} - x^{(s)''}$$

$$x^{(s)'} \geq 0, \quad x^{(s)''} \geq 0$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{s-1} \\ x^{(s)'} \\ x^{(s)''} \\ x^{s+1} \\ \vdots \\ x^s \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{s-1} \\ c_s \\ -c_s \\ c_{s+1} \\ \vdots \\ c_s \end{bmatrix}, \quad \bar{a}_l = \begin{bmatrix} a_{l1} \\ \vdots \\ a_{ls-1} \\ a_{ls} \\ -a_{ls} \\ a_{ls+1} \\ \vdots \\ a_{ls} \end{bmatrix}$$

$$F(x) = \bar{c}^T \bar{x}$$

$$\bar{a}_l^T \bar{x} - b_l = 0$$

Postać kanoniczna

$$F(x) = -2x^{(1)} + x^{(2)} \rightarrow F(x) = -2x^{(1)} + x^{(2)} + 0x^{(3)} + 0x^{(4)}$$

$$-x^{(1)} - x^{(2)} + 1 \leq 0 \rightarrow -x^{(1)} - x^{(2)} + x^{(3)} + 1 = 0 \quad x^{(3)} \geq 0$$

$$2x^{(1)} + 3x^{(2)} - 6 \leq 0 \rightarrow 2x^{(1)} + 3x^{(2)} + x^{(4)} - 6 = 0 \quad x^{(4)} \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ x^{(4)} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie

$$F(x) = c^T x$$

$$\mathcal{D}_X = \{x \in R^s: Ax - b = 0_L, \quad x \geq 0\}$$

$$L(x, \lambda) = c^T x + \lambda^T (Ax - b) - \mu^T x$$

$$\nabla_x L(x, \lambda) = c + A^T \lambda - \mu = 0_S$$

$$\nabla_\lambda L(x, \lambda) = Ax - b = 0_L \quad !!!$$

$$\mu^T \nabla_\mu L = \mu^T x = 0$$

$$\mu \geq 0_S$$

$$x \geq 0_S$$

Rozwiązanie

Rozwiązanie dopuszczalne $x \in \mathcal{D}_x$

$$Ax = b \quad \text{Rz}(A) = L \quad S \geq L$$

Rozwiązanie Bazowe

$$x^B = B^{-1}b \quad B - \text{macierz } L \text{ kolumn z macierzy } A$$

maksymalna liczba ?

$$\binom{S}{L} = \frac{S!}{L! (S - L)!}$$

Rozwiązanie Bazowe Dopuszczalne $x^B \geq 0_L$

Niezdegenerowane Rozwiązanie Bazowe Dopuszczalne $x^B > 0_L$

Metoda simplex

1. Wyznaczenie rozwiązania początkowego
2. Kryterium zbieżności – zatrzymanie procedury
3. Przechodzenie z jednej bazy do drugiej
4. Postępowanie przy rozwiązaniach zdegenerowanych

Metoda simplex

Warunek zatrzymania procedury

$$Ax = b \quad x_B = B^{-1}b \quad \text{- rozwiązanie bazowe}$$

$$x_B = B^{-1}Ax$$

$$Ax - b = 0_L \quad /B^{-1}$$

$$B^{-1}Ax - B^{-1}b = 0_L$$

$$c^T x = c^T x - c_B^T (B^{-1}Ax - B^{-1}b)$$

$$= (c^T - c_B^T B^{-1}A)x - c_B^T B^{-1}b$$

$$= (c^T - c_B^T B^{-1}A)x - c_B^T x_B$$

Algorytm simplex

			c_1	$\dots$	c_k	$\dots$	c_S			
Zmienne bazowe	c_B	h_0	h_1	$\dots$	h_k	$\dots$	h_S		$\frac{h_{S0}}{h_{Sk}}$	$h_{Sk} \geq 0$
x_{j1}	c_{j1}	h_{10}	h_{11}	$\dots$	h_{1k}	$\dots$	h_{1S}			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
x_{jl}	c_{jl}	h_{l0}	h_{l1}	$\dots$	h_{lk}	$\dots$	h_{lS}			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
x_{jL}	c_{jL}	h_{L0}	h_{L1}	$\dots$	h_{Lk}	$\dots$	h_{LS}			
			$c_1 - z_1$	$\dots$	$c_k - z_k$	$\dots$	$c_S - z_S$			

$$z_k = \sum_{s \in I_B} c_s h_{sk}$$

$$h'_{ls} := \frac{h_{ls}}{h_{lk}}; \quad h'_{is} = h_{is} - \frac{h_{ik} h_{ls}}{h_{lk}}$$

$$s = 1, 2, \dots, S \quad i = 0, 1, \dots, S$$

$$s \in I_B \setminus \{l\}$$

Algorytm simplex

1. Wyznaczamy początkową bazę dopuszczalną
2. Badamy czy $c - c_B B^{-1} A \geq 0_S$. Jeżeli tak to x_B - rozwiązanie problem $x = [x_B \ 0]$
3. Wstawiamy do bazy k - takie, że $c_k - z_k = \min_{1 \leq s \leq S} (c_s - z_s)$, $z_k = \sum_{s \in I_B} c_s h_{sk}$
4. Badamy, czy $h_k \leq 0$, jeśli tak - funkcja nieograniczona
5. Wyrzucamy z bazy l - takie, że

$$\frac{h_{l0}}{h_{lk}} = \min_{1 \leq s \leq S} \left\{ \frac{h_{s0}}{h_{sk}}, h_{sk} > 0 \right\}$$

6. $I_B := I_B \setminus \{l\} \cup \{k\}$
 $I_B = \{j \in \{1, 2, \dots, S\} \mid x^{(j)} \text{ jest elementem bazy} \}$
7. Jeżeli wskaźnik optymalności zmiennej nie bazowej jest równy 0 to istnieje kolejne rozwiązanie (rozwiązania alternatywne)

Algorytm simplex

			c_1	$\dots$	c_k	$\dots$	c_S		
Zmienne bazowe	c_B	h_0	h_1	$\dots$	h_k	$\dots$	h_S	$\frac{h_{S0}}{h_{Sk}}$	$h_{Sk} \geq 0$
x_{j1}	c_{j1}	h_{10}	h_{11}	$\dots$	h_{1k}	$\dots$	h_{1S}		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_{jl}	c_{jl}	h_{l0}	h_{l1}	$\dots$	h_{lk}	$\dots$	h_{lS}		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_{jL}	c_{jL}	h_{L0}	h_{L1}	$\dots$	h_{Lk}	$\dots$	h_{LS}		
			$c_1 - z_1$	$\dots$	$c_k - z_k$	$\dots$	$c_S - z_S$		

$$z_k = \sum_{s \in I_B} c_s h_{sk}$$

$$h'_{ls} := \frac{h_{ls}}{h_{lk}}; \quad h'_{is} = h_{is} - \frac{h_{ik} h_{ls}}{h_{lk}}$$

$$s = 1, 2, \dots, S \quad i = 0, 1, \dots, S$$

$$s \in I_B \setminus \{l\}$$

Przykład

$$F(x) = -2x^{(1)} - 3x^{(2)} \rightarrow F(x) = -2x^{(1)} - 3x^{(2)} + 0x^{(3)} + 0x^{(4)} + 0x^{(5)}$$

$$2x^{(1)} + 2x^{(2)} - 14 \leq 0 \rightarrow 2x^{(1)} + 2x^{(2)} + x^{(3)} = 14$$

$$x^{(1)} + 2x^{(2)} - 8 \leq 0 \rightarrow x^{(1)} + 2x^{(2)} + x^{(4)} = 8$$

$$4x^{(1)} - 16 \leq 0 \rightarrow 4x^{(1)} + x^{(5)} = 16$$

$$F(x) = [-2 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ x^{(4)} \\ x^{(5)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ x^{(4)} \\ x^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

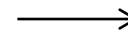
Przykład

			-2	-3	0	0	0		
Zmienne bazowe	c_B	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	$\frac{h_0}{h_2}$	
x_3	0	14	2	2	1	0	0	$\frac{14}{2}$	
x_4	0	8	1	2	0	1	0	$\frac{8}{2}$	→
x_5	0	16	4	0	0	0	1	-	
		0	-2	-3	0	0	0		

$$I_B = \{3, 4, 5\}$$

Przykład

			-2	-3	0	0	0	
Zmienne bazowe	c_B	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	$\frac{h_0}{h_1}$
x_3	0	6	1	0	1	-1	0	$\frac{6}{1}$
x_2	-3	4	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{4}{\frac{1}{2}}$
x_5	0	16	4	0	0	0	1	$\frac{16}{4}$
			$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	0	



Przykład

x_B			-2	-3	0	0	0	
Zmienne bazowe	c_B	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	
x_3	0	2	0	0	1	-1	$-\frac{1}{4}$	
x_2	-3	2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	
x_1	-2	4	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	
			0	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$	

≥ 0

Rozwiązanie [4 2 2 0 0]

Wyznaczanie bazy początkowej (zadanie pomocnicze)

$$Ax = b$$

$$x \geq 0_S$$

Zmodyfikuj zbiór

$$Ax + Ix_a = b \quad x \geq 0, x_a \geq 0$$

Zadanie pomocnicze

$$\min_{x_a} 1^T x_a$$

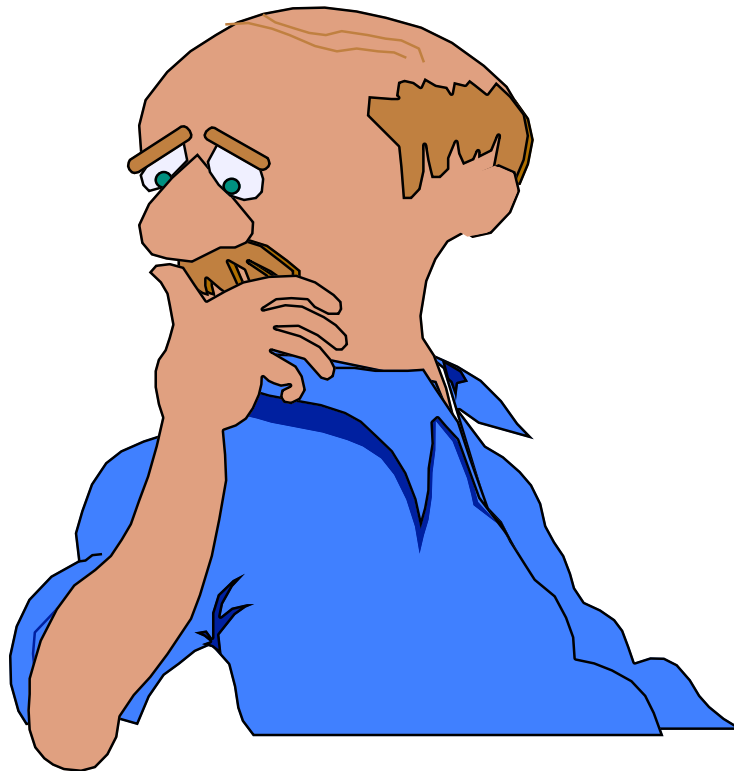
Metoda 2. fazowa

$$F(x) = c^T x + M1^T x_a$$

Przy ograniczeniach

$$Ax + IX_a = b, x \geq 0, x_A \geq 0$$

Dziękuję za uwagę



Programowanie kwadratowe



Programowanie liniowe

Postać kanoniczna

$$F(x) = c^T x$$

$$A: \mathcal{D}_X = \{x \in R^s, Ax - b = 0_L, x \geq 0_S\}$$

lub

$$B: \mathcal{D}_x = \{x \in R^s, Ax - b \leq 0_L, x \geq 0_S\}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_S \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_L \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(S)} \end{bmatrix}, \quad A_{S \times L} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1S} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{L1} & \cdots & a_{LS} \end{bmatrix}$$

Programowanie kwadratowe

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$F(x) = x^T D x + c^T x$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in R^s, Ax = b, x \geq 0\}$$

Szczególny przypadek

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathcal{R}^S : x \geq 0_S, \psi(x) \leq 0_M\}$$

$$L(x, \mu) = F(x) + \mu^T \psi(x)$$

$$\nabla_x L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} \geq 0_S$$

$$\nabla_\mu L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} \leq 0_M$$

$$x^T \nabla_x L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} = 0$$

$$\mu^T \nabla_\mu L(x, \mu) \Big|_{x^*, \mu^*} = 0$$

$$x^* \geq 0_S$$

$$\mu^* \geq 0_M$$

Szczególny przypadek

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathcal{R}^S : \varphi(x) = 0_L, \psi(x) \leq 0_M\}$$

$$L(x, \lambda, \mu) = F(x) + \lambda^T \varphi(x) + \mu^T \psi(x)$$

$$\nabla_x L(x, \lambda, \mu) \Big|_{x^*, \lambda^*, \mu^*} = 0_S$$

$$\nabla_\lambda L(x, \lambda, \mu) \Big|_{x^*, \lambda^*, \mu^*} = 0_L$$

$$\mu^T \nabla_\mu L(x, \lambda, \mu) \Big|_{x^*, \lambda^*, \mu^*} = 0$$

$$\nabla_\mu L(x, \lambda, \mu) \Big|_{x^*, \lambda^*, \mu^*} \leq 0_M$$

$$\mu^* \geq 0_S$$

Zadanie programowania kwadratowego

$$F(x) = x^T D x + c^T x$$

$$D_x = \{x \in R^s, Ax = b, x \geq 0\}$$

$$L(x, \lambda) = x^T D x + C^T x + \lambda^T (Ax - b)$$

$$v = \nabla_x L(x, \lambda) = c + 2Dx - A^T \lambda \geq 0$$

$$x^T \nabla_x L(x, \lambda) = x^T (c + 2Dx - A^T \lambda) = 0$$

$$\nabla_\lambda L(x, \lambda) = Ax - b = 0$$

$$x \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \nabla_x L(x, \lambda) \geq 0 \\ x^T \nabla_x L(x, \lambda) = 0 \\ \nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0 \\ x \geq 0, v \geq 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c + 2Dx - A^T \lambda - v = 0 \\ x^T v = 0 \\ Ax = b \\ x \geq 0, v \geq 0, \end{array} \right.$$

Zadanie programowania kwadratowego

$$Ax = b$$

$$2Dx - A^T \lambda - v = -c$$

$$x^T v = 0,$$

$$x \geq 0, v \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 2D & -A^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -c \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0, v \geq 0, x^T v = 0$$

λ – nieokreślonego znaku

Zadanie programowania kwadratowego

$Bx_B = b$ - rozwiązanie bazowe

$$Ax = b$$

$$2Dx + A^T \lambda - v + Eu = -c \quad u - \text{sztuczna zmienna}$$
$$u \geq 0$$

D_B - macierz, której kolumny macierzy D odpowiadają kolumnom macierzy A w B

d_{Bj} - j -ty wiersz macierzy D_B

E - diagonalna o elementach ± 1

$$\Delta j = \begin{cases} +1 & -c_j - 2d_{Bj}x_B \geq 0 \\ -1 & -c_j - 2d_{Bj}x_B < 0 \end{cases}$$

$$u_j = |-c_j - 2d_{Bj}x_B|, j = 1, 2, \dots, S, \lambda = 0, v = 0$$

Zadanie programowania kwadratowego

Przyjmując $u_j = |-c_j - 2d_{Bj}x_B|, j = 1, 2, \dots, S, \lambda = 0, v = 0$ otrzymujemy jedno z rozwiązań, które możemy zapisać:

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 2D_B & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 2D & -A^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -c \end{bmatrix}$$

Teraz sztuczne zmienne należy usunąć

Stosujemy zadanie programowania liniowego

$$F(u) = 1^T u$$

Przy ograniczeniach

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2D & -A^T & A^T & -I & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda' \\ \lambda'' \\ v \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -c \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0, v \geq 0, x^T v = 0, \lambda' \geq 0, \lambda'' \geq 0,$$

Zadanie programowania liniowego

Programowanie ilorazowe



Zadanie programowania ilorazowego

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^S : \phi(x) = 0_L, \psi(x) \leq 0_M, x \geq 0_S\}$$

Funkcja celu: $F(x) = \frac{a^T x + b}{c^T x + d}$

$$a \in \mathcal{R}^S, b \in \mathcal{R}, c \in \mathcal{R}^S, d \in \mathcal{R}$$

Ograniczenia:

$$\varphi_l(x) = p_l^T x - \alpha_l = 0, \quad l = 1, 2, \dots, L$$
$$p_l = \begin{bmatrix} p_l^{(1)} \\ p_l^{(2)} \\ \vdots \\ p_l^{(S)} \end{bmatrix}$$

$$\psi_m(x) = q_m^T x - \beta_m \leq 0, \quad m = 1, 2, \dots, M$$
$$q_l = \begin{bmatrix} q_m^{(1)} \\ q_m^{(2)} \\ \vdots \\ q_m^{(S)} \end{bmatrix}$$

Zadanie programowania ilorazowego - postać kanoniczna

$$x^* \rightarrow F(x^*) = \min_{x \in \mathcal{D}_x} F(x)$$

$$F(x) = \frac{a^T x + b}{c^T x + d} \quad a \in \mathcal{R}^s, b \in \mathcal{R}, c \in \mathcal{R}^s, d \in \mathcal{R}$$

$$c^T x + d \neq 0$$

$$\mathcal{D}_x = \{x \in \mathcal{R}^s, Ax - e \leq 0_L, x \geq 0_s\}$$

Metoda Charnesa, Coopera

Zadanie programowania ilorazowego

1. Załóżmy że: $c^T x + d > 0$

Oznaczmy przez $z = \frac{1}{c^T x + d}$ oraz $y = zx$

Wówczas zadanie optymalizacji sprowadza się do:

Minimalizować $a^T y + bz$ $\longleftarrow F(x) = \frac{a^T x + b}{c^T x + d} / z$

Przy ograniczeniach: $Ay - ez \leq 0$ $\longleftarrow Ax - e \leq 0_L / z$

$$c^T y + dz = 1$$

$$y \geq 0$$

$$z \geq 0$$

Zadanie sprowadzono do zadania programowania liniowego

Ostatecznie: $x = \frac{y}{z}$

Zadanie programowania ilorazowego

2. Załóżmy że: $c^T x + d < 0$

Oznaczmy przez $-z = \frac{1}{c^T x + d}$ oraz $y = zx$

Wówczas zadanie optymalizacji sprowadza się do:

Minimalizować $-a^T y - bz \longleftarrow F(x) = \frac{a^T x + b}{c^T x + d} / z$

Przy ograniczeniach: $Ay - ez \leq 0 \longleftarrow Ax - e \leq 0_L / z$

$$-c^T y - dz = 1$$

$$y \geq 0$$

$$z \geq 0$$

Zadanie sprowadzono do zadania programowania liniowego

Ostatecznie: $x = \frac{y}{z}$

Zadanie programowania ilorazowego - przykład

Funkcja celu: $F(x_1, x_2) = \frac{-2x_1 + x_2 + 2}{x_1 + 3x_2 + 4}$

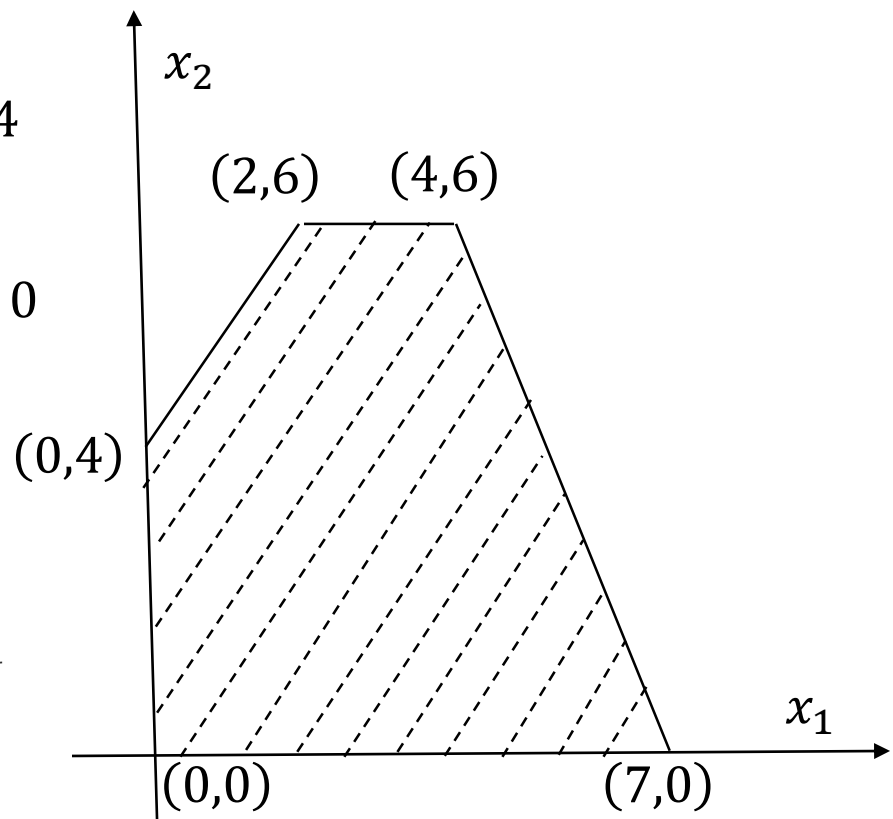
Ograniczenia: $-x_1 + x_2 \leq 4$
 $2x_1 + x_2 \leq 14$
 $x_2 \leq 6$
 $x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$

Dla punktów ze zbioru dopuszczalnego

$$x_1 + 3x_2 + 4 > 0$$

np. dla punktu (0,0) mamy

$$0 + 3 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$$



Zadanie programowania ilorazowego – przykład

Niech: $z = \frac{1}{x_1 + 3x_2 + 4}, \quad y_1 = zx_1, \quad y_2 = zx_2$

$$F(x_1, x_2) = \frac{-2x_1 + x_2 + 2}{x_1 + 3x_2 + 4} \longrightarrow \bar{F}(y_1, y_2, z) = -2y_1 + y_2 + 2z$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4 \quad / \cdot z \longrightarrow -y_1 + y_2 - 4z \leq 0$$

$$2x_1 + x_2 \leq 14 \quad / \cdot z \longrightarrow 2y_1 + y_2 - 14z \leq 0$$

$$x_2 \leq 6 \quad / \cdot z \longrightarrow y_2 - 6z \leq 0$$

$$z = \frac{1}{x_1 + 3x_2 + 4} \quad / \cdot (x_1 + 3x_2 + 4) \longrightarrow y_1 + 3y_2 + 4z = 1$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \longrightarrow y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \quad z \geq 0$$

Z rozwiązania zadania programowania liniowego $\longrightarrow y_1 = 7/11, \quad y_2 = 0, \quad z = 1/11$

Po podstawieniu mamy $\longrightarrow x_1 = \frac{y_1}{z} = 7, \quad x_2 = \frac{y_2}{z} = 0$

Dziękuję za uwagę

