

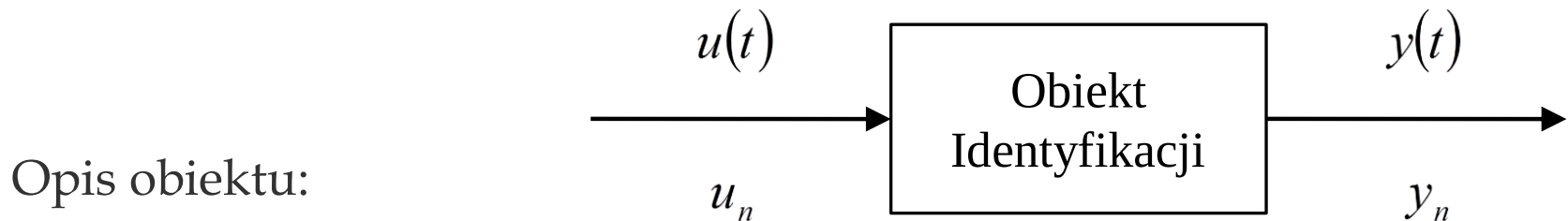
Metody Systemowe i Decyzyjne w Informatyce



Wykład 2e . Identyfikacja obiektów dynamicznych równanie różnicowe

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe



$$y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_m y_{n-m} = b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_k u_{n-k}$$

Lub przyjmując oznaczenia:

$$A(z^{-1}) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_k z^{-k}$$

Równania modelu mają postać:

$$y_n + A(z^{-1})y_n = B(z^{-1})u_n$$

$$y_n(1 + A(z^{-1})) = B(z^{-1})u_n$$

$$K(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{(1 + A(z^{-1}))}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe

Oznaczmy przez:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} \quad X_n = \begin{bmatrix} -y_{n-1} \\ -y_{n-2} \\ \vdots \\ -y_{n-m} \\ u_n \\ u_{n-1} \\ \vdots \\ u_{n-k} \end{bmatrix}$$

Równania modelu przyjmą postać:

$$y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_m y_{n-m} = b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_k u_{n-k}$$

$$y_n = -a_1 y_{n-1} - \dots - a_m y_{n-m} + b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_k u_{n-k}$$

$$y_n = \theta^T X_n$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe

Metoda najmniejszych kwadratów:

Wskaźnik jakości identyfikacji:

$$Q_N(\theta) = \sum_{n=0}^N (y_n - \theta^T \mathbf{X}_n)^2$$

Rozwiązując zadanie optymalizacji:

$$\theta_N \rightarrow Q_N(\theta_N) = \min_{\theta \in \Theta} Q_N(\theta) = \min_{\theta \in \Theta} \sum_{n=0}^N (y_n - \theta^T \mathbf{X}_n)^2$$

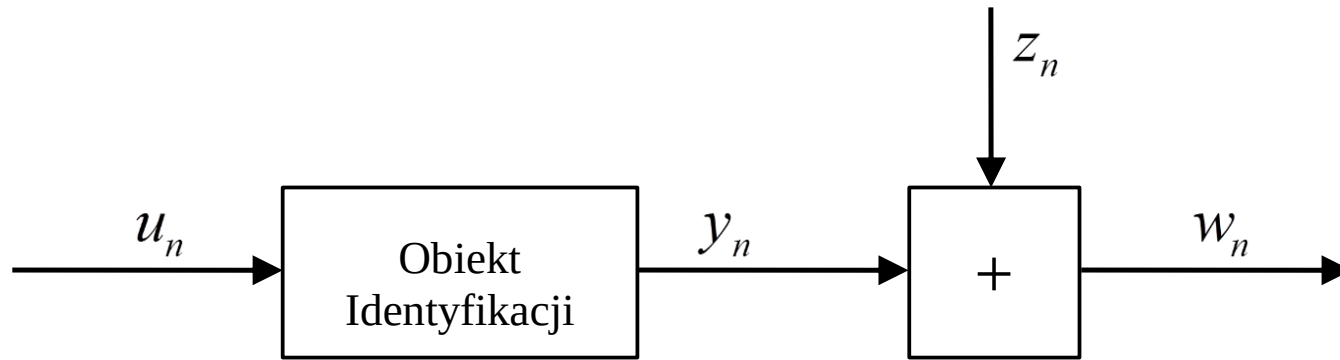
$$\nabla_{\theta} Q_N(\theta) = \nabla_{\theta} \sum_{n=0}^N (y_n - \theta^T \mathbf{X}_n)^2 = -2 \sum_{n=0}^N (y_n - \theta^T \mathbf{X}_n) \mathbf{X}_n = 0$$

Otrzymujemy algorytm identyfikacji:

$$\theta_N = \left(\sum_{n=0}^N \mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^T \right)^{-1} \sum_{n=0}^N y_n \mathbf{X}_n$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe



$$y_n = a_1 y_{n-1} + \dots + a_m y_{n-m} = b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_k u_{n-k}$$

Pomiar wyjścia z addytywnymi zakłóceniami pomiarowymi:

$$w_n = y_n + z_n$$

$$y_n = w_n - z_n$$

$$w_n + a_1 w_{n-1} + \dots + a_m w_{n-m} = b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_k u_{n-k} + \overbrace{z_n + a_1 z_{n-1} + \dots + a_m z_{n-m}}^{v_n}$$

z teraz jest skorelowane z wcześniejszym stanem (poprzednio było: $w = F(u, \theta) + z$)

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe

Lub korzystając ze zwartego opisu

$$A(z^{-1}) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}$$
$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_k z^{-k}$$

Mamy równoważną postać:

$$w_n = A(z^{-1})w_n + B(z^{-1})u_n + v_n$$
$$w_n (1 + A(z^{-1})) = B(z^{-1})u_n$$

$$w_n = -a_1 w_{n-1} - a_2 w_{n-2} - \dots - a_m w_{n-m} + b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_k u_{n-k} + v_n$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe

Oznaczając przez:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} -w_{n-1} \\ -w_{n-2} \\ \vdots \\ -w_{n-m} \\ u_n \\ u_{n-1} \\ \vdots \\ u_{n-k} \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy model:

$$w_n = \theta^T \mathbf{X}_n + v_n$$

$$v_n = z_n + a_1 z_{n-1} + \dots + a_m z_{n-m}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe

1. Podejście bezpośrednie

$$w_n = -A(z^{-1})w_n + B(z^{-1})u_n + v_n = -A(z^{-1})w_n + B(z^{-1})u_n + (1 + A(z^{-1}))z_n$$
$$w_n(1 - A(z^{-1})) = B(z^{-1})u_n + (1 + A(z^{-1}))z_n$$

$$\frac{w_n(1 + A(z^{-1}))}{1 + A(z^{-1})} = w_n = \frac{B(z^{-1})u_n}{1 + A(z^{-1})} + z_n$$

Teraz z jest skorelowane, ale prowadzi do nieliniowego zadania optymalizacji:

$$\theta_N \rightarrow Q_N(\theta_N) = \min_{\theta \in \Theta} \sum_{n=0}^N \left(w_n - \frac{B(z^{-1})u_n}{1 + A(z^{-1})} \right)^2$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe

Metoda najmniejszych kwadratów (zapominamy o skorelowaniu zakłóceń) :

Wskaźnik jakości:

$$Q_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N (w_n - \theta^T \mathbf{X}_n)^2$$

Solution: $\nabla_{\theta} Q_N(\theta) = -2 \sum_{n=0}^N (w_n - \theta^T \mathbf{X}_n) \mathbf{X}_n = \mathbf{0}_{m+k+1}$

$$\theta_N = \left(\sum_{n=0}^N \mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^T \right)^{-1} \sum_{n=0}^N w_n \mathbf{X}_n$$

Lecz: v_n oraz z_n są skorelowane $v_n = z_n + a_1 z_{n-1} + \dots + a_m z_{n-m}$

Jak to poprawić?

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe

2. Dekorelacja zakłóceń

Założmy że: $v_n = \rho v_{n-1} + \tilde{z}_n$ czyli $v_n(1 - \rho z^{-1}) = \tilde{z}_n$

Mnożąc obie strony równania:

$$w_n + a_1 w_{n-1} + \dots + a_m w_{n-m} = b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_k u_{n-k} + \overbrace{z_n + a_1 z_{n-1} + \dots + a_m z_{n-m}}^{v_n}$$

przez $(1 - \rho z^{-1})$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} w_n(1 - \rho z^{-1}) = & -a_1 w_{n-1}(1 - \rho z^{-1}) - \dots - a_m w_{n-m}(1 - \rho z^{-1}) + \\ & + b_0 u_n(1 - \rho z^{-1}) + \dots + b_k u_{n-k}(1 - \rho z^{-1}) + v_n(1 - \rho z^{-1}) \end{aligned}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe

Oznaczmy przez $w_n^f = (1 - \rho z^{-1})w_n$ oraz $u_n^f = (1 - \rho z^{-1})u_n$, gdzie f oznacza odpowiedni sygnał „odfiltrowany”. Wówczas:

$$w_n^f = -a_1 w_{n-1}^f - \dots - a_m w_{n-m}^f + b_0 u_n^f + b_1 u_{n-1}^f + \dots + b_k u_{n-k}^f + \tilde{z}_n$$

I teraz mamy podstawy do zastosowania metody najmniejszych kwadratów:

$$\theta_N = \left(\sum_{n=0}^N \mathbf{X}_n^f (\mathbf{X}_n^f)^T \right)^{-1} \sum_{n=0}^N w_n^f \mathbf{X}_n^f$$

Gdzie u_n^f oraz w_n^f jest wyznaczane iteracyjnie wg następującej procedury :

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe

Krok 1.

$$\theta_N = \left(\sum_{n=0}^N \mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^T \right)^{-1} \sum_{n=0}^N w_n \mathbf{X}_n$$

Krok 2.

$$w_n = \theta_N^T \mathbf{X}_n + v_n$$

$$v_n = w_n - \theta_N^T \mathbf{X}_n$$

Krok 3.

$$v_n = v_{n-1} \rho + \tilde{z}_n$$

$$\min_{\rho} \sum_{n=1}^N (v_n - \rho v_{n-1})^2 \Rightarrow \rho_N = \frac{\sum_{n=1}^N v_n v_{n-1}}{\sum_{n=1}^N v_{n-1}^2}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe

Krok 4.

$$w_n^f = (1 - \rho_N z^{-1}) w_n = w_n - \rho_N w_{n-1}$$

$$u_n^f = (1 - \rho_N z^{-1}) u_n = u_n - \rho_N u_{n-1}$$

Krok 5.

$$\theta_N^f = \left(\sum_{n=0}^N \mathbf{X}_n^f (\mathbf{X}_n^f)^T \right)^{-1} \sum_{n=0}^N w_n^f X_n^f$$

GOTO 2

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe

3. Uogólniona metoda najmniejszych kwadratów

$$(d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_r z^{-r}) D(z^{-1})$$

Znaczy to, że teraz bierzemy pod uwagę korelację nie tylko od poprzedniego kroku ρz^{-1} jak poprzednio lecz o r poprzednich taktów.

$$v_n = D(z^{-1}) v_n + \tilde{z}_n$$

$$v_n = d_1 v_{n-1} + d_2 v_{n-2} + \dots + d_r v_{n-r} + \tilde{z}_n$$

$$v_n (1 - D(z^{-1})) = \tilde{z}_n$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe

3. Uogólniona metoda najmniejszych kwadratów

Mnożąc obie strony równania :

$$w_n + a_1 w_{n-1} + \dots + a_m w_{n-m} = b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_k u_{n-k} + \overbrace{z_n + a_1 z_{n-1} + \dots + a_m z_{n-m}}^{v_n}$$

przez $(1 - D(z^{-1}))$, otrzymujemy:

$$w_n^f = -a_1 w_{n-1}^f - \dots - a_m w_{n-m}^f + b_0 u_n^f + \dots + b_m u_{n-m}^f + \tilde{z}_n$$

gdzie odpowiednie odfiltrowane sygnały :

$$w_n^f = w_n (1 - D(z^{-1})) \quad u_n^f = u_n (1 - D(z^{-1}))$$

Otrzymujemy zgodnie z następującą iteracyjną procedurą:

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe

3. Uogólniona metoda najmniejszych kwadratów

Krok 1.

$$\theta_N = \left(\sum_{n=0}^N \mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^T \right)^{-1} \sum_{n=0}^N w_n X_n$$

Krok 2.

$$v_n = w_n - \theta_N^T X_n$$

Krok 3.

$$v_n = d_1 v_{n-1} + d_2 v_{n-2} + \dots + d_r v_{n-r} + \tilde{z}_n$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe

3. Uogólniona metoda najmniejszych kwadratów

Przyjmując oznaczenia $\Omega = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix}$, $\bar{v}_n = \begin{bmatrix} v_{n-1} \\ v_{n-2} \\ \vdots \\ v_{n-r} \end{bmatrix}$ powyższe możemy zapisać:

$$v_n = \Omega^T \bar{v}_n + \tilde{z}_n$$

Rozwiązanie następującego zadania

$$\Omega_N \rightarrow \min_{\Omega} \sum_{n=r}^N (v_n - \Omega^T \bar{v}_n)^2 \Rightarrow \Omega_N = \left(\sum_{n=r}^N \bar{v}_n \bar{v}_n^T \right)^{-1} \sum_{n=r}^N v_n \bar{v}_n$$

daje parametry wielomianu D .

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Linowe równanie różnicowe

3. Uogólniona metoda najmniejszych kwadratów

Krok 4.

$$w_n^f = w_n \left(1 - D(z^{-1})\right) \quad \leftarrow \quad \Omega_N$$

$$u_n^f = u_n \left(1 - D(z^{-1})\right) \quad \leftarrow \quad \Omega_N$$

Krok 5.

$$\theta_N^f = \left(\sum_{n=0}^N \mathbf{x}_n^f (\mathbf{x}_n^f)^T \right)^{-1} \sum_{n=0}^N w_n^f X_n^f$$

GOTO 2

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Algorytmy rekurencyjne

Mamy estymator:

$$\theta_N = \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \right)^{-1} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n w_n$$

Pojawiają się nowe pomiary: $\mathbf{x}_{N+1}$, w_{N+1}

Należy wyznaczyć nową estymator z uwzględnieniem nowych danych

$$\theta_{N+1} = \Psi_R(\theta_N, \mathbf{x}_{N+1}, w_{N+1})$$

$$\theta_{N+1} = \left(\sum_{n=1}^{N+1} \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \right)^{-1} \sum_{n=1}^{N+1} \mathbf{x}_n w_n = \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T + \mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T \right)^{-1} \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n w_n + \mathbf{x}_{N+1} w_{N+1} \right)$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Algorytmy rekurencyjne

Przydatne przekształcenia algebraiczne:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}$$

$\mathbf{B} = \mathbf{x}$ – wektor kolumnowy

$$\mathbf{D}^{-1} = 1$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{x}^T$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{x}\mathbf{x}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}(1 + \mathbf{x}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}^T\mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{D}^{-1} = -1$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{x}\mathbf{x}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}(1 - \mathbf{x}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}^T\mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \alpha$$

$$(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{x}\mathbf{x}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\left(\frac{1}{\alpha} + \mathbf{x}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\right)^{-1}\mathbf{x}^T\mathbf{A}^{-1}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Algorytmy rekurencyjne

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{N+1} \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \right)^{-1} &= \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T + \mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T \right)^{-1} = \\ &= \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \right)^{-1} - \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \right)^{-1} \frac{\mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T}{1 + \mathbf{x}_{N+1}^T \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \right)^{-1} \mathbf{x}_{N+1}} \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \right)^{-1} \end{aligned}$$

Niech: $P_N = \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \right)^{-1}$

Powyższe przyjmuje postać:

$$P_{N+1} = P_N - P_N \frac{\mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T}{1 + \mathbf{x}_{N+1}^T P_N \mathbf{x}_{N+1}} P_N$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Algorytmy rekurencyjne

$$\begin{aligned}\theta_{N+1} &= \left(P_N - P_N \frac{\mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T}{1 + \mathbf{x}_{N+1}^T P_N \mathbf{x}_{N+1}} P_N \right) \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n w_n + \mathbf{x}_{N+1} w_{N+1} \right) = \\&= P_N \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n w_n + P_N \mathbf{x}_{N+1} w_{N+1} - \frac{P_N \mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T P_N}{1 + \mathbf{x}_{N+1}^T P_N \mathbf{x}_{N+1}} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n w_n - \frac{P_N \mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T P_N \mathbf{x}_{N+1} w_{N+1}}{1 + \mathbf{x}_{N+1}^T P_N \mathbf{x}_{N+1}} = \\&= P_N \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n w_n + \frac{P_N \mathbf{x}_{N+1} w_{N+1} + P_N \mathbf{x}_{N+1} w_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T P_N \mathbf{x}_{N+1} - P_N \mathbf{x}_{N+1} w_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T P_N \mathbf{x}_{N+1} - P_N \mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T P_N \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n w_n}{1 + \mathbf{x}_{N+1}^T P_N \mathbf{x}_{N+1}} = \\&= P_N \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n w_n + \frac{P_N \mathbf{x}_{N+1} w_{N+1} - P_N \mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T P_N \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n w_n}{1 + \mathbf{x}_{N+1}^T P_N \mathbf{x}_{N+1}} = \\&= \theta_N + K_{N+1} (w_{N+1} - \mathbf{x}_{N+1}^T \theta_N)\end{aligned}$$

gdzie:
$$K_{N+1} = \frac{P_N \mathbf{x}_{N+1}}{1 + \mathbf{x}_{N+1}^T P_N \mathbf{x}_{N+1}}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Algorytmy rekurencyjne

Podsumowując, otrzymujemy następujący algorytm

$$\theta_N = \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \right)^{-1} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n w_n = P_N \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n w_n, \text{ gdzie: } P_N = \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \right)^{-1}$$

$$\theta_{N+1} = \theta_N + K_{N+1} (w_{N+1} - \mathbf{x}_{N+1}^T \theta_N)$$

$$K_{N+1} = \frac{P_N \mathbf{x}_{N+1}}{1 + \mathbf{x}_{N+1}^T P_N \mathbf{x}_{N+1}}$$

$$P_{N+1} = P_N - \frac{P_N \mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T P_N}{1 + \mathbf{x}_{N+1}^T P_N \mathbf{x}_{N+1}}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Parametry zmienne w czasie

Uwzględnienie pomiarów ze współczynnikiem wagowym β_n

$$\theta_N \rightarrow \min \sum_{n=1}^N \beta_n (w_n - \theta^T x_n)^2$$

Jak dobrać współczynnik wagowy β_n ?

Dla małego n (pomiarzy nieaktualne) β_n winno być małe (np.: bliskie zeru)

Dla dużego n (nowe, aktualne pomiary) β_n winno być stosunkowo duże (np.: bliskie jeden)

$$\beta_n = \alpha^{N-n} \quad \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Parametry zmienne w czasie

Estymator otrzymujemy rozwiązując zadanie:

$$\theta_N \rightarrow \min \sum_{n=1}^N \alpha^{N-n} (w_n - \theta^T x_n)^2$$

Rozwiązanie:

$$\theta_N = \left(\sum_{n=1}^N \alpha^{N-n} x_n x_n^T \right)^{-1} \sum_{n=1}^N \alpha^{N-n} x_n w_n$$

$$\begin{aligned} \theta_{N+1} &= \left(\sum_{n=1}^{N+1} \alpha^{N+1-n} x_n x_n^T \right)^{-1} \sum_{n=1}^{N+1} \alpha^{N+1-n} x_n w_n = \\ &= \left(\alpha \sum_{n=1}^N \alpha^{N-n} x_n x_n^T + x_{N+1} x_{N+1}^T \right)^{-1} \left(\alpha \sum_{n=1}^N \alpha^{N-n} x_n w_n + x_{N+1} w_{N+1} \right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Parametry zmienne w czasie

Dokonując kolejnych przekształceń otrzymujemy algorytm:

$$\theta_{N+1} = \theta_N + K_{N+1} (w_{N+1} - \mathbf{x}_{N+1}^T \theta_N)$$

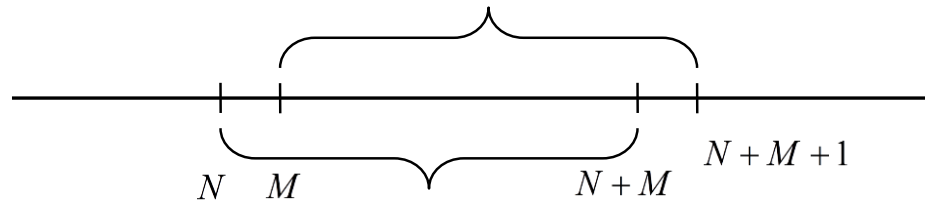
$$K_{N+1} = \frac{P_N \mathbf{x}_{N+1}}{\alpha + \mathbf{x}_{N+1}^T P_N \mathbf{x}_{N+1}}$$

$$P_{N+1} = \frac{1}{\alpha} \left(P_N - \frac{P_N \mathbf{x}_{N+1} \mathbf{x}_{N+1}^T P_N}{\alpha + \mathbf{x}_{N+1}^T P_N \mathbf{x}_{N+1}} \right)$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Parametry zmienne w czasie

Przesuwne okno tj.: do wyznaczenia estymatora wyznaczamy ostatnich „ M ” pomiarów. Po pojawieniu się nowego pomiaru, najstarszy N -ty należy odrzucić, nowy $N+M+1$ dołączyć



$$\theta_{N+M,M}$$

$$\theta_{N+M+1,M+1} \quad - \text{dodać pomiary } \mathbf{x}_{N+M+1}, w_{N+M+1}$$

$$\theta_{N+M+1,M} \quad - \text{usunąć pomiary } \mathbf{x}_N, w_N$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Parametry zmienne w czasie

Estymator otrzymujemy rozwiązując zadanie:

$$\theta_{N+M,M} \rightarrow \min_{\theta} \sum_{n=N}^{N+M} (w_n - \theta^T x_n)^2$$

W wyniku otrzymujemy:

$$\theta_{N+M,M} = \left(\sum_{n=N}^{N+M} x_n x_n^T \right)^{-1} \sum_{n=N}^{N+M} x_n w_n$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Parametry zmienne w czasie

Krok 1. Dodajemy pomiary: $\mathbf{x}_{N+M+1}$ w_{N+M+1}

$$\theta_{N+M+1,M+1} = \left(\sum_{n=N}^{N+M+1} \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \right)^{-1} \sum_{n=N}^{N+M+1} \mathbf{x}_n w_n$$

Krok 2. Usuwamy pomiary: $\mathbf{x}_N$ w_N

$$\theta_{N+M+1,M} = \left(\sum_{n=N+1}^{N+M+1} \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \right)^{-1} \sum_{n=N+1}^{N+M+1} \mathbf{x}_n w_n$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Parametry zmienne w czasie

Niech:
$$P_{N+M,M} = \left(\sum_{n=N}^{N+M} \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \right)^{-1} \quad P_{N+M+1,M+1} = \left(\sum_{n=N}^{N+M+1} \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \right)^{-1}$$

Korzystając z algorytmów rekurencyjnych otrzymujemy:

Krok 1.

$$\theta_{N+M+1,M+1} = \theta_{N+M,M} + K_{N+M+1,M+1} \left(w_{N+M+1} - \mathbf{x}_{N+M+1}^T \theta_{N+M,M} \right)$$

$$K_{N+M+1,M+1} = \frac{P_{N+M,M} \mathbf{x}_{N+M+1}}{1 + \mathbf{x}_{N+M+1}^T P_{N+M,M} \mathbf{x}_{N+M+1}}$$

$$P_{N+M+1,M+1} = P_{N+M,M} - \frac{P_{N+M,M} \mathbf{x}_{N+M+1} \mathbf{x}_{N+M+1}^T P_{N+M,M}}{1 + \mathbf{x}_{N+M+1}^T P_{N+M,M} \mathbf{x}_{N+M+1}}$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Parametry zmienne w czasie

Krok 2.

$$\theta_{N+M+1,M} = \theta_{N+M,M+1} - K_{N+M+1,M} (w_N - \mathbf{x}_N^T \theta_{N+M+1,M+1})$$

$$K_{N+M+1,M} = \frac{P_{N+M+1,M+1} \mathbf{x}_N}{1 - \mathbf{x}_N^T P_{N+M+1,M+1} \mathbf{x}_N}$$

$$P_{N+M+1,M} = P_{N+M+1,M+1} + P_{N+M+1,M+1} \frac{\mathbf{x}_N \mathbf{x}_N^T}{1 - \mathbf{x}_N^T P_{N+M+1,M+1} \mathbf{x}_N} P_{N+M+1,M+1}$$

Dziękuję za uwagę

