

Metody Systemowe i Decyzyjne w Informatyce



Wykład 2c . Identyfikacja obiektów dynamicznych

Identyfikacja obiektów dynamicznych



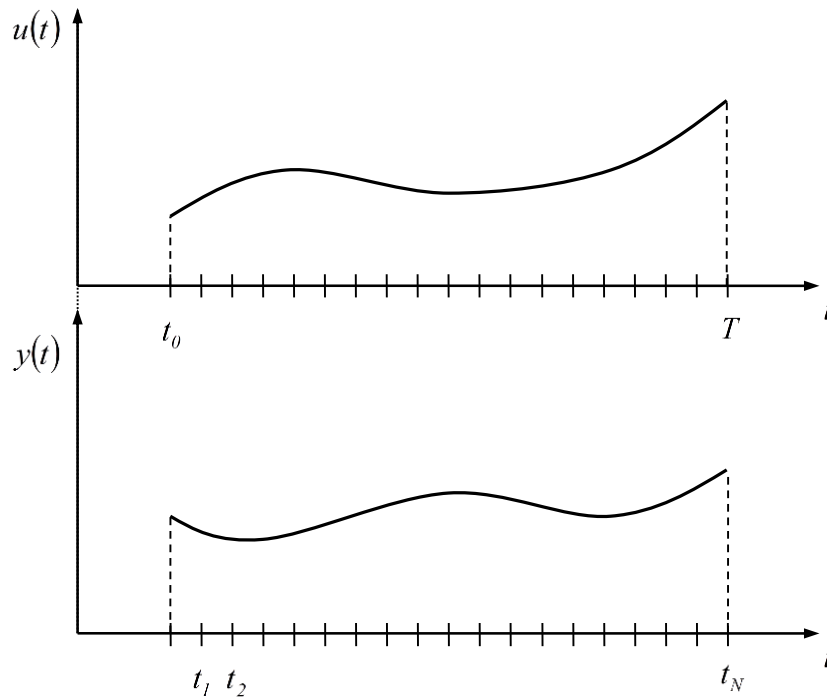
Opisy:

- ⌘ Zmienne stanu;
- ⌘ Równanie różniczkowe/różnicowe;
- ⌘ Transmitancja: $K(s)$, $K(z)$;
- ⌘ Odpowiedź impulsowa: $k_i(t)$, k_{in} ;
- ⌘ Odpowiedź na skok jednostkowy: $h(t)$, h_n

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Obiekt ciągły

Dla sygnału wejściowego $\{u(t)\}_{t_0}^T$ rejestrujemy sygnał wyjściowy : $\{y(t)\}_{t_0}^T$



$$t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq T$$

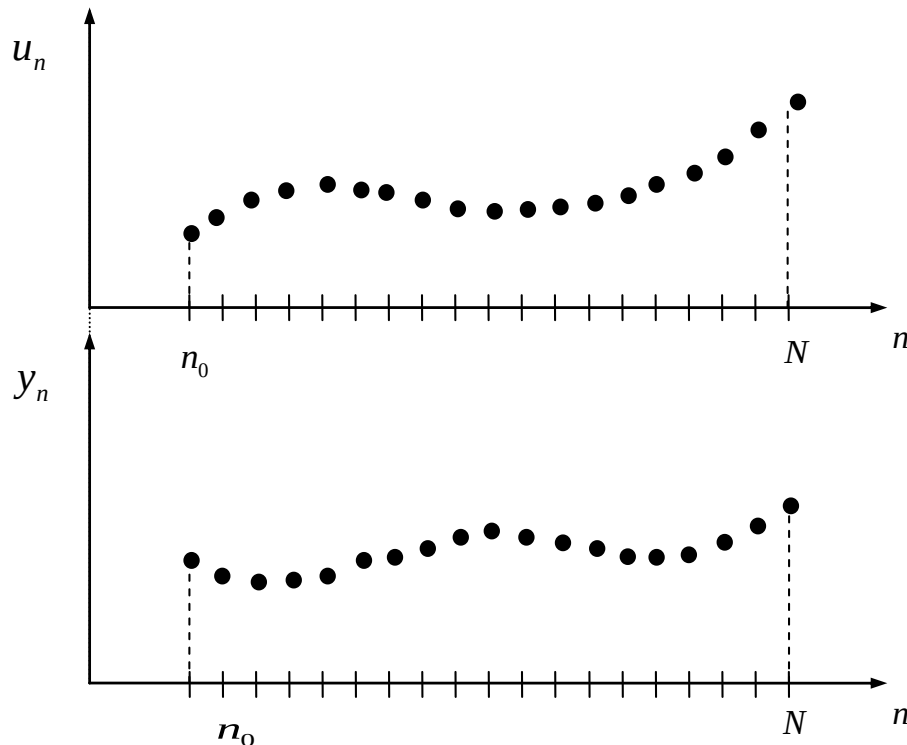
$$\{u(t_n)\}_{n=0}^N$$

$$\{y(t_n)\}_{n=0}^N$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Obiekt dyskretny

Dla zadanego wejścia u_n mierzymy wartość wyjścia y_n :



$$\{u_n\}_{n=0}^N$$

$$\{y_n\}_{n=0}^N$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Równanie różniczkowe



Założmy, że obiekt opisany jest równaniem:

$$F\left(\frac{d^m y(t)}{dt^m}, \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}}, \dots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t); \frac{d^v u(t)}{dt^v}, \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}}, \dots, \frac{du(t)}{dt}, u(t); \theta\right) = 0, \quad m \geq v$$

z warunkami początkowymi w_0

Należy wyznaczyć nieznane parametry opisu θ .

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Równanie różniczkowe

Jeżeli opis wejścia $u(t)$ jest zadany analitycznie np.:

$$u(t) = \mathbf{1}(t)$$

$$u(t) = A \sin(\omega t)$$

wówczas możliwe jest analityczne rozwiązanie równania:

$$y(t) = \mathcal{F} \left(\{u(\tau)\}_{\tau=t_0}^t, w_0; \theta \right)$$

Zatem dla każdego punktu pomiarowego otrzymujemy:

$$y(t_n) = \mathcal{F} \left(\{u(\tau)\}_{\tau=t_0}^{t_n}, w_0; \theta \right), \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Rozwiązanie powyższego układu równań względem θ daje algorytm identyfikacji

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Równanie różniczkowe

Przykład

$$\frac{dy(t)}{dt} = \theta u(t)$$

Sygnał wejściowy: $u(t) = \mathbf{1}(t)$

Warunki początkowe: $y(0) = 0$

Rozwiązanie równania: $y(t) = \theta \int_0^t u(\tau) d\tau = \theta \int_0^t 1(\tau) d\tau = \theta t$

Dla n – tego pomiaru mamy: $y(t_n) = \theta t_n$

Stąd: $\theta = \frac{y(t_n)}{t_n}$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Równanie różniczkowe

Pomiary: $\{u(t_n)\}_{n=0}^N$ $\{y(t_n)\}_{n=0}^N$

Numeryczne rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\tilde{y}(t_n, \theta) = \mathcal{F}_N \left(\{u(t_k)\}_{k=0}^n, w_0; \theta \right) \quad y(t_n) \approx \tilde{y}(t_n, \theta)$$

$$\theta \approx \theta_N \rightarrow \min \underbrace{\sum_{n=0}^N (y(t_n) - \tilde{y}(t_n, \theta))^2}_{B(\theta)} = \min \underbrace{\sum_{n=0}^N (y(t_n) - \mathcal{F}_N(\{u(t_k)\}_{k=0}^n, w_0; \theta))^2}_{B(\theta)}$$

gdzie:

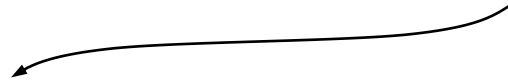
$B(\theta)$ – błąd procedury numerycznej

Identyfikacja obiektów dynamicznych

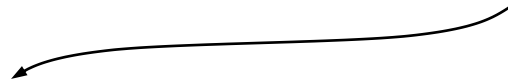
Równanie różniczkowe

$B(\theta)$ nie jest dane w postaci analitycznej, stąd do wyznaczenia rozwiązania konieczność stosowania optymalizacyjnej numerycznej procedury poczynając od θ_0 :

$$\theta_0 \rightarrow \tilde{y}(t_n, \theta_0) \rightarrow B(\theta_0)$$



$$\theta_1 \rightarrow \tilde{y}(t_n, \theta_1) \rightarrow B(\theta_1)$$



$\vdots$

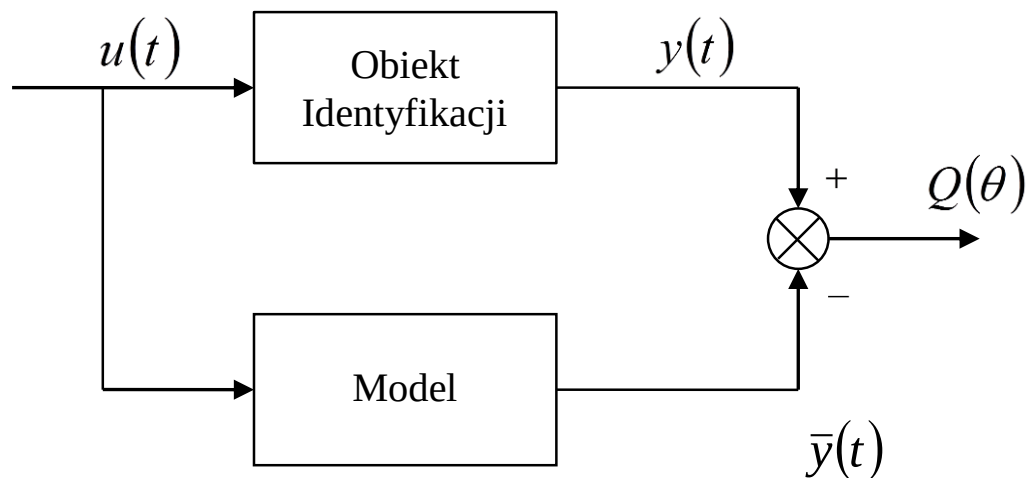
$$\theta_K \rightarrow \tilde{y}(t_n, \theta_K) \rightarrow B(\theta_K)$$

$$\theta_K \approx \theta$$

K – liczba kroków procedury numerycznej optymalizacji

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Równanie różniczkowe - wybór optymalnego modelu



$$\Phi \left(\frac{d^m \bar{y}(t)}{dt^m}, \frac{d^{m-1} \bar{y}(t)}{dt^{m-1}}, \dots, \frac{d\bar{y}(t)}{dt}, \bar{y}(t); \frac{d^v u(t)}{dt^v}, \frac{d^{v-1} u(t)}{dt^{v-1}}, \dots, \frac{du(t)}{dt}, u(t); \theta \right) = 0$$

w_0 - warunki początkowe

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Równanie różniczkowe - wybór optymalnego modelu

1. $u(t)$ jest zadane analitycznie, np.: $u(t) = \mathbf{1}(t)$, $u(t) = A \sin(\omega t)$;

Model – rozwiązanie równania :

$$\bar{y}(t, \theta) = \tilde{\Phi}\left(\{u(\tau)\}_{\tau=t_0}^t, w_0; \theta\right)$$

Wskaźnik jakości identyfikacji:

$$Q(\theta) = \int_{t_0}^T (y(t) - \bar{y}(t, \theta))^2 dt = \int_{t_0}^T \left(y(t) - \tilde{\Phi}\left(\{u(\tau)\}_{\tau=t_0}^t, w_0; \theta\right)\right)^2 dt$$

Zadanie optymalizacji:

$$\theta^* \rightarrow Q(\theta^*) = \min_{\theta \in \Theta} Q(\theta)$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Równanie różniczkowe - wybór optymalnego modelu

Przykład:

Model:

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \theta u(t)$$

Sygnał wejściowy: $u(t) = \mathbf{1}(t)$

Warunki początkowe: $y(0) = 0$

Rozwiązanie równania : $\bar{y}(t) = \theta \int_0^t u(\tau) d\tau = \theta t$

Wskaźnik jakości: $Q(\theta) = \int_0^T (y(t) - \theta t)^2 dt$

Optymalny parametr: $\theta^* = \frac{\int_0^T y(t) t dt}{\int_0^T t^2 dt}$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Równanie różniczkowe - wybór optymalnego modelu

2. Dyskretne pomiary wyjścia $\{y(t_n)\}_{n=0}^N$ dla zadanego wejścia $\{u(t)\}_{t_0}^T$

Wskaźnik jakości:
$$Q_N(\theta) = \sum_{n=0}^N \left(y(t_n) - \tilde{\Phi} \left(\{u(\tau)\}_{\tau=t_0}^{t_n}, w_0; \theta \right) \right)^2$$

Optymalny parametr modelu:

$$\theta_N^* \rightarrow Q_N(\theta_N^*) = \min_{\theta \in \Theta} Q_N(\theta)$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Równanie różniczkowe - wybór optymalnego modelu

2. Pomiary: $\{u(t_n)\}_{n=0}^N, \{y(t_n)\}_{n=0}^N$;

Rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\tilde{y}_N(t_n, \theta) = \tilde{\Phi}_N\left(\{u(t_k)\}_{k=0}^n, w_0; \theta\right)$$

Wskaźnik jakości:

$$Q_N(\theta) = \sum_{n=0}^N \left(y(t_n) - \tilde{y}_N(t_n, \theta)\right)^2 = \sum_{n=0}^N \left(y(t_n) - \tilde{\Phi}_N\left(\{u(t_k)\}_{k=0}^n, w_0; \theta\right)\right)^2$$

Optymalny parametr modelu:

$$\theta_N^* \rightarrow Q_N(\theta_N^*) = \min_{\theta \in \Theta} Q_N(\theta)$$

Identyfikacja obiektów dynamicznych

Równanie różniczkowe - wybór optymalnego modelu

$Q_N(\theta)$ nie jest dane w postaci analitycznej, stąd do wyznaczenia rozwiązania konieczność stosowania optymalizacyjnej numerycznej procedury poczynając od θ_0 :

$$\begin{array}{c} \theta_0 \rightarrow \bar{y}(t_n, \theta_0) \rightarrow Q_N(\theta_0) \\ \quad \searrow \\ \theta_1 \rightarrow \bar{y}(t_n, \theta_1) \rightarrow Q_N(\theta_1) \\ \quad \searrow \\ \vdots \\ \theta_K \rightarrow \bar{y}(t_n, \theta_K) \rightarrow Q_N(\theta_K) \\ \\ \theta_K^* \approx \theta_N^* \end{array}$$

K – liczba kroków procedury numerycznej optymalizacji

Dziękuję za uwagę

