

Sieci złożone

MODELE ODZDZIAŁYWAŃ SPOŁECZNYCH

Agenda

- ▶ Model Watts-Strogatz (sieci społeczne)
 - ▶ Model Kleinberga
 - ▶ Przypadkowe uszkodzenia i celowe ataki
- ▶ Modele rozprzestrzeniania się epidemii
 - ▶ SIS i inne
- ▶ Wyszukiwanie informacji
 - ▶ *PageRank*

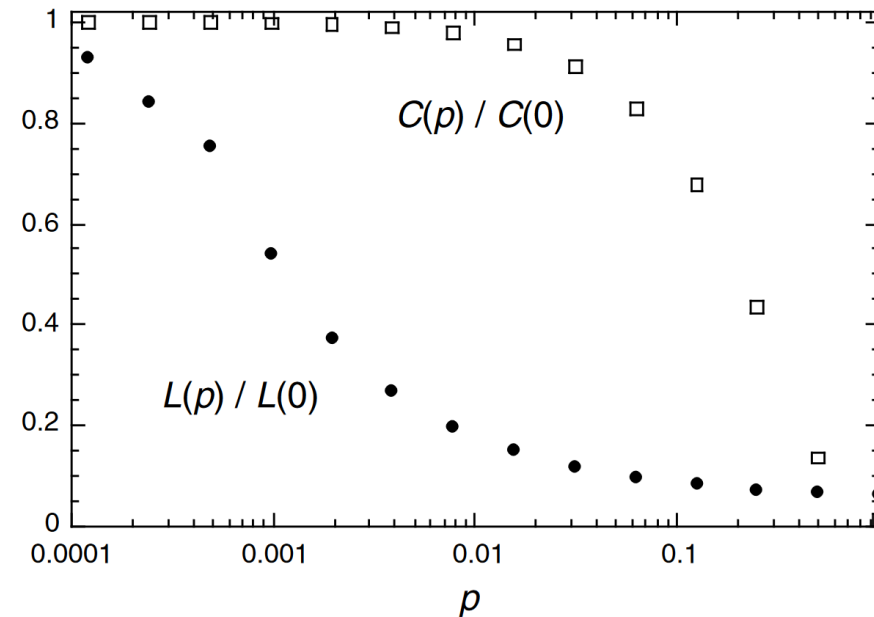
Model Watts-Strogatz

▶ $L(p)$ – długość najkrótszej drogi między parą losowo wybranych węzłów (własność globalna)

▶ $C(p)$ – współczynnik gronowania
cliquishness

Wartości zerowe – dla regularnych siatek

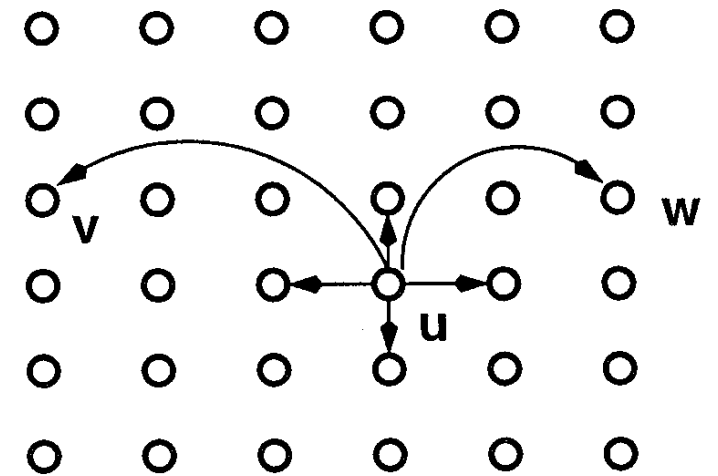
Przejście do sieci małych światów jest niewykrywalne lokalnie



Watts, D. J., & Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 393(6684), 440-442.

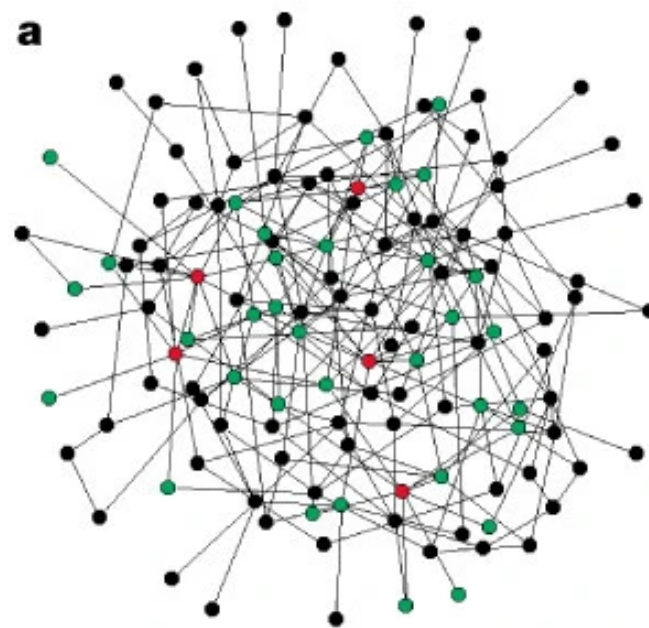
Model Kleinberga

- ▶ Regularna siatka węzłów
- ▶ Drugi koniec wybierany jest z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do d_{ij}^{-r}
- ▶ Dla $r=2$ każdy węzeł ma tyle samo połączeń w każdej skali
- ▶ Ciekawostka
 - ▶ modele Watts-Strogatza i Kleinberga
nie uwzględniają potęgowego rozkładu stopni węzłów



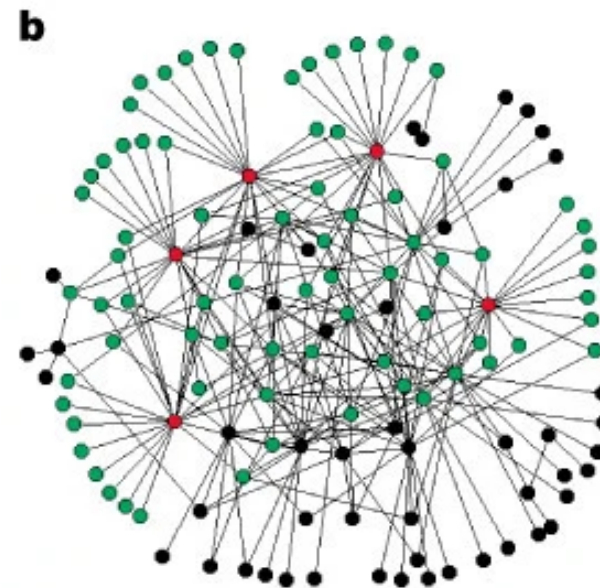
Kleinberg, J. (2000, May). The small-world phenomenon: An algorithmic perspective. In *Proceedings of the thirty-second annual ACM symposium on Theory of computing* (pp. 163-170).

Erdős–Rényi (ER) model



Exponential

Watts–Strogatz model



Scale-free

130 węzłów
215 łączy

$$\langle k \rangle = 3.3$$

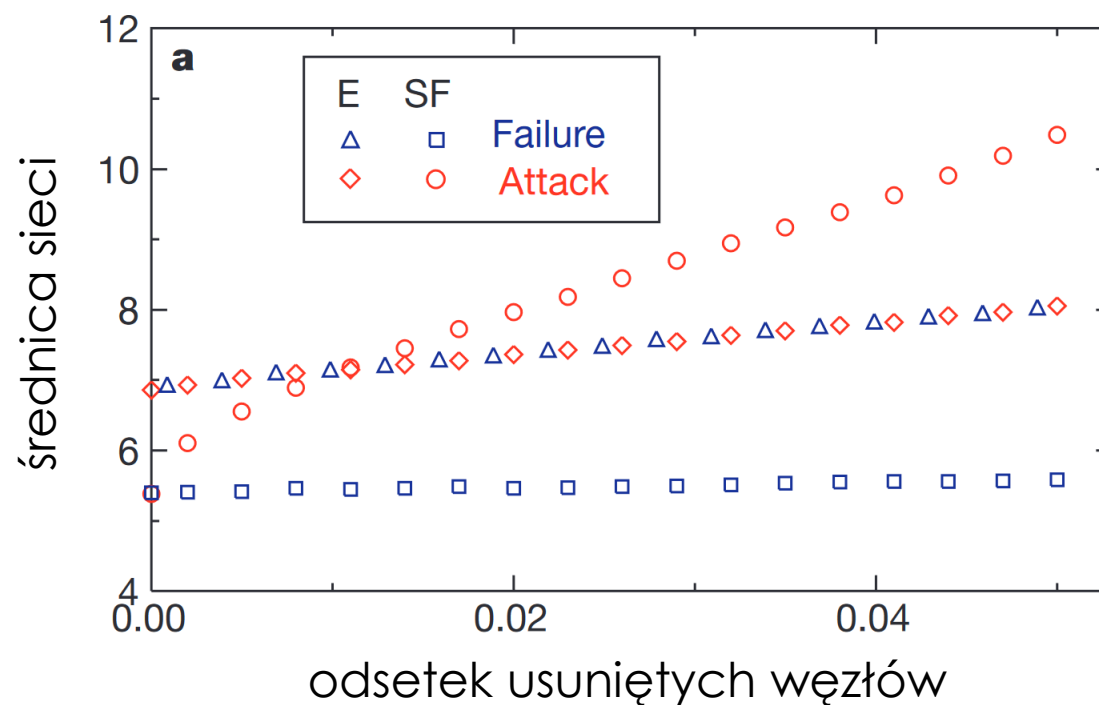
$$P(k \gg \langle k \rangle)$$

Rozkład stopni węzłów

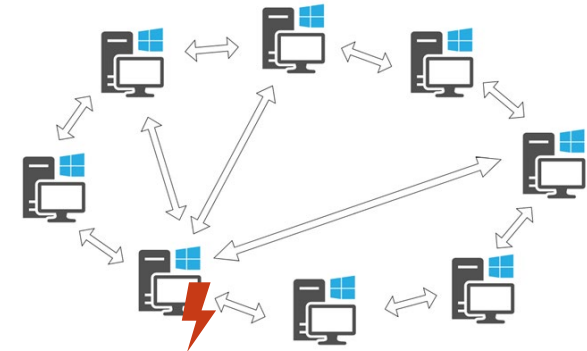
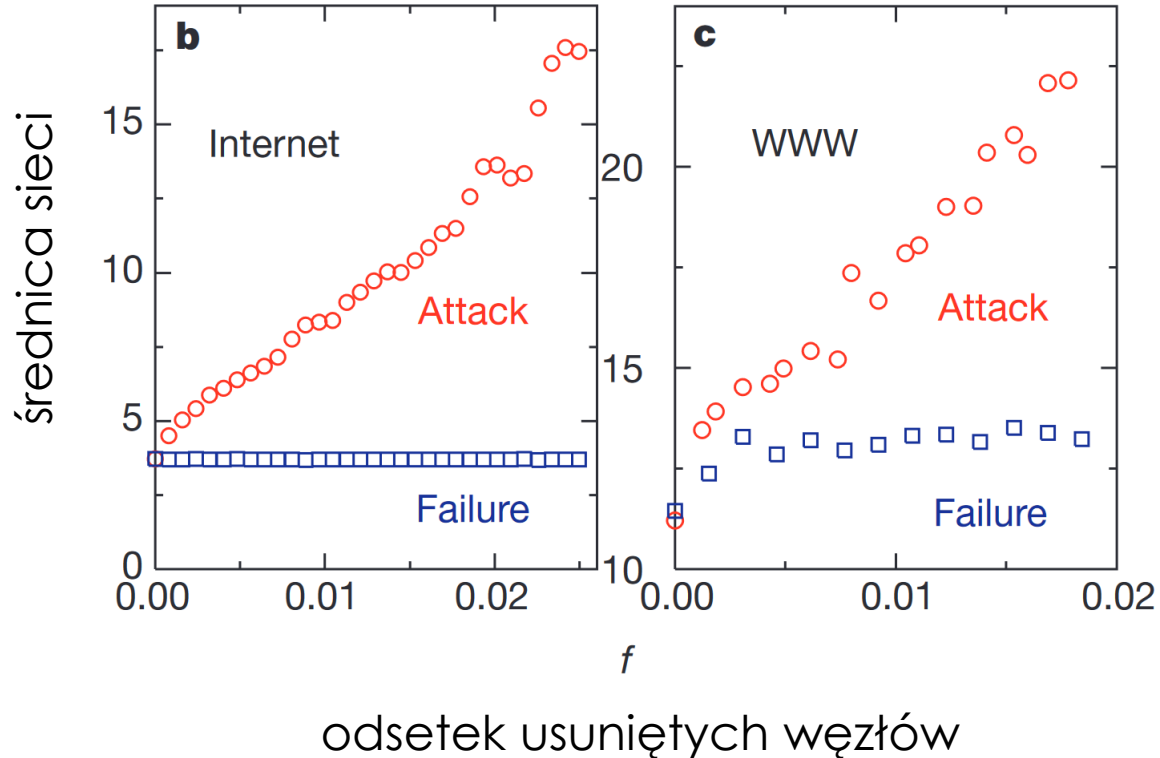
$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$$

Dla dużych N :
$$P(k) \approx \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Przypadkowe uszkodzenia i celowe ataki



Przypadkowe uszkodzenia i celowe ataki

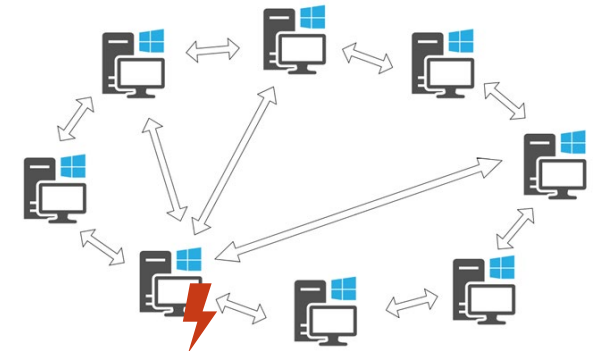


*error tolerance and attack vulnerability
are generic properties of
communication networks*

Albert, R., Jeong, H., & Barabási, A. L. (2000).
Error and attack tolerance of complex networks.
Nature, 406(6794), 378-382.

Przypadkowe uszkodzenia i celowe ataki

- ▶ Odporność na ataki w sieci bezskalowej
 - ▶ nieodporna na celowe ataki na huby
 - ▶ odporna na przypadkowe usterki: małe prawdopodobieństwo wylosowania huba
- ▶ W sieci o dobrze określonym średnim stopniu węzła
 - ▶ ten sam procent zablokowanych węzłów prowadzi do większych zmian średnich odległości między węzłami
- ▶ Zdecentralizowane algorytmy przesyłania informacji: *sieci p2p*



Przypadkowe uszkodzenia i celowe ataki

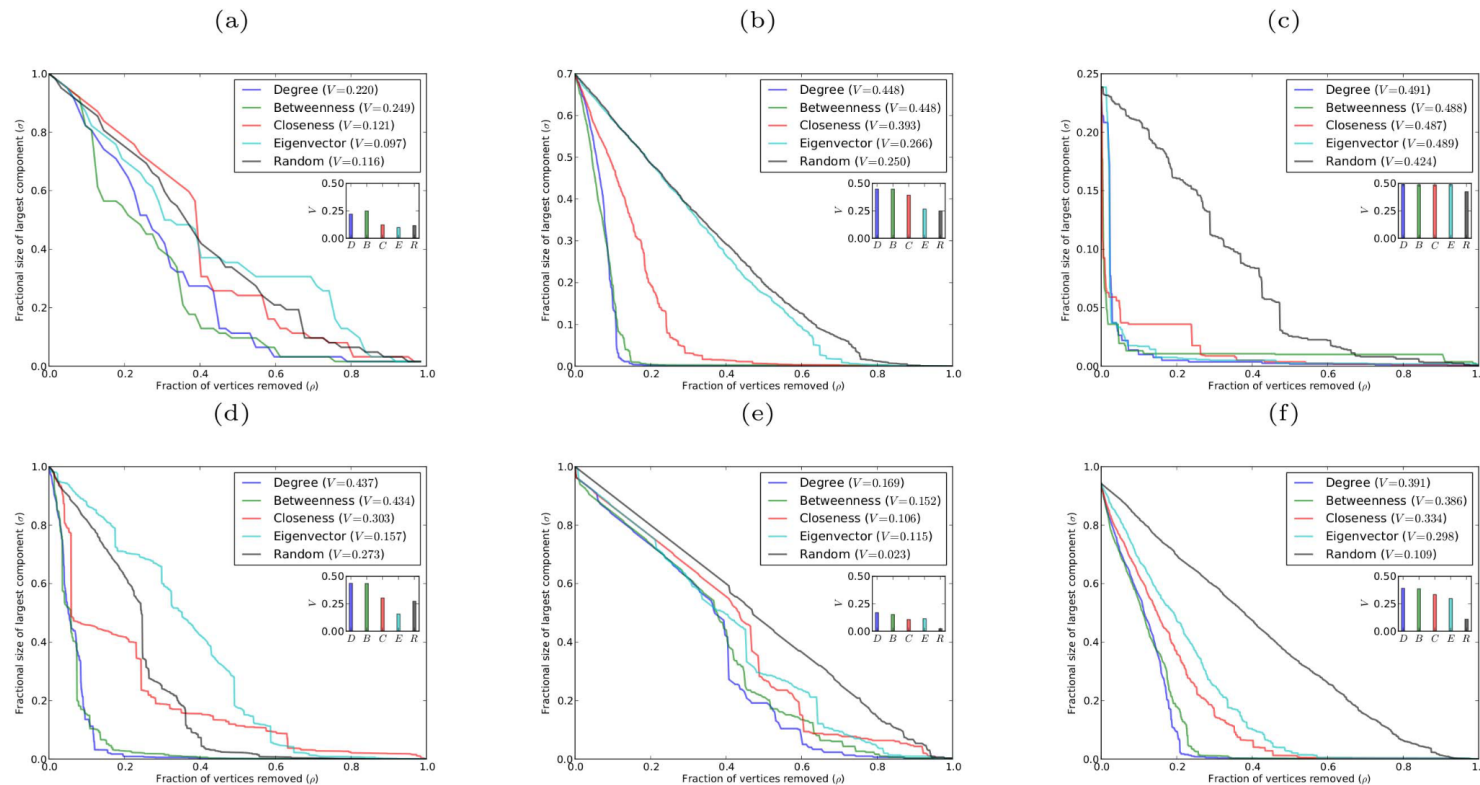


Figure 7. Robustness against simultaneous targeted attack for some empirical networks. (a) dolphin social network; (b) high-energy physics collaboration network; (c) network science collaboration network; (d) power grid network; (e) neural network of *C. elegans*; (f) protein-protein interaction network of *S. cerevisiae*.

Iyer, S., Killingback, T., Sundaram, B., & Wang, Z. (2013). Attack robustness and centrality of complex networks. *PloS one*, 8(4), e59613.

Epidemie

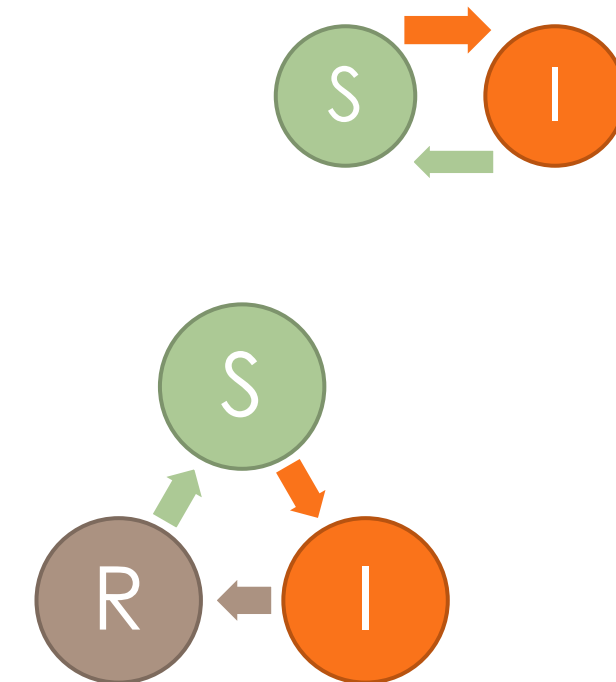
- ▶ Plotki, mody, przekonania, technologie
- ▶ Wirusy w sieciach komputerowych
- ▶ Modele: SIS, SIR, SEIR, ...

Estrada, Ernesto. "COVID-19 and SARS-CoV-2. Modeling the present, looking at the future." *Physics Reports* (2020).



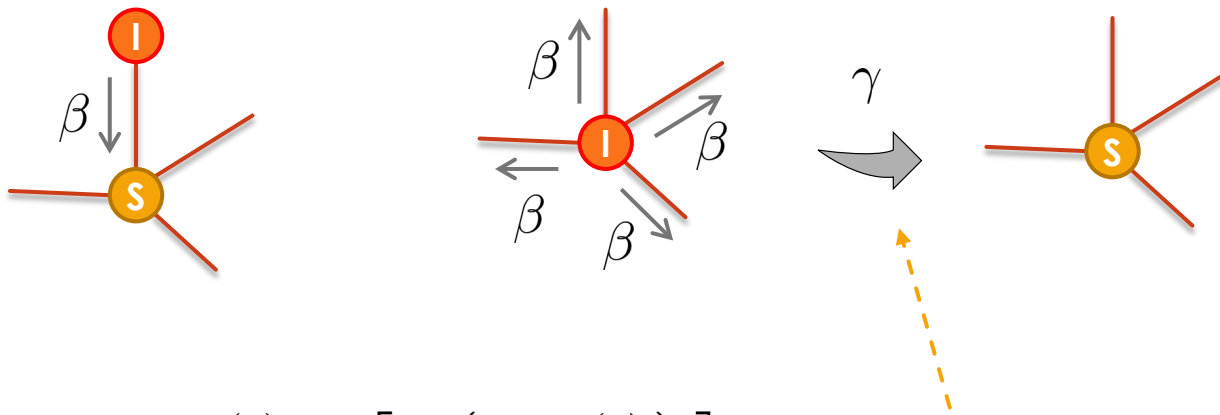
Modelowanie epidemii

- ▶ S – *susceptible* (podatny)
- ▶ E – *exposed* (ujawniony)
- ▶ I – *infected / infectious* (zarażone / zarażający)
- ▶ R – *recovered / removed* (ozdrowiały / zmarły)



Modelowanie epidemii

- ▶ Model SIS w grafie przypadkowym: $\langle k \rangle$ jest dobrze określone
 - ▶ dokładnie wymieszane populacje: każdy osobnik typu S,I ma jednakowe prawd. spotkania innego osobnika typu S,I



$$\frac{dI(t)}{dt} = \left[\beta \left(\langle k \rangle \frac{I(t)}{N} \right) \right] S(t) - \gamma I(t)$$

$$I(t) + S(t) = N = \text{const.}$$

$$\lambda = \frac{\beta}{\gamma} \quad \text{– tempo rozprzestrzeniania się epidemii}$$

$$\phi = \frac{I(t)}{N} \quad \text{– prawd., że łącze prowadzi do chorego węzła}$$

Modelowanie epidemii

- ▶ Model SIS w sieci bezskalowej $p(k) \propto k^{-\alpha}$

$$I_k(t) + S_k(t) = N_k = Np(k)$$

$$\frac{dI_k(t)}{dt} = (\beta k \phi) S_k(t) - \gamma I_k(t)$$

- ▶ W sieci bezskalowej próg epidemii λ_c wynosi 0
- ▶ Eliminacja kluczowych węzłów

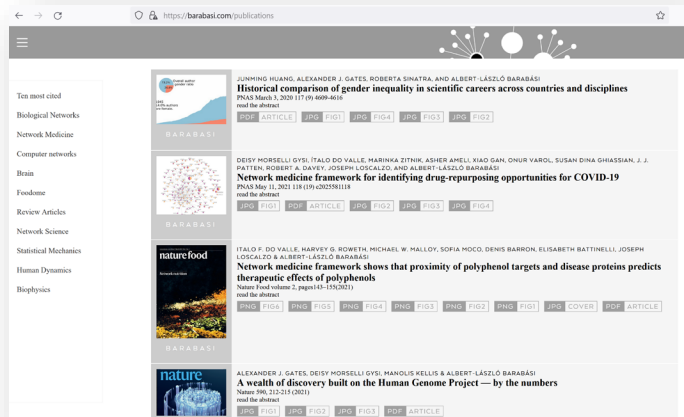
Boguná, M., & Pastor-Satorras, R. (2002). Epidemic spreading in correlated complex networks. *Physical Review E*, 66(4), 047104.

Pastor-Satorras, R., Castellano, C., Van Mieghem, P., & Vespignani, A. (2015). Epidemic processes in complex networks. *Reviews of modern physics*, 87(3), 925.

Boguná, M., Pastor-Satorras, R., & Vespignani, A. (2003). Absence of epidemic threshold in scale-free networks with degree correlations. *Physical review letters*, 90(2), 028701.

Wyszukiwanie informacji – *PageRank*

- ▶ Zadanie: utworzyć listę stron www według ich „atrakcyjności”
- ▶ **Im więcej mam koleżanek**, tym jestem atrakcyjniejsza
- ▶ **Atrakcyjność moich koleżanek** zwiększa moją własną



P

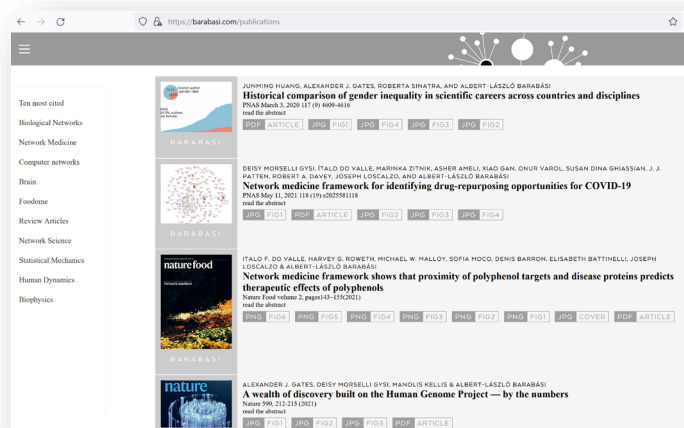
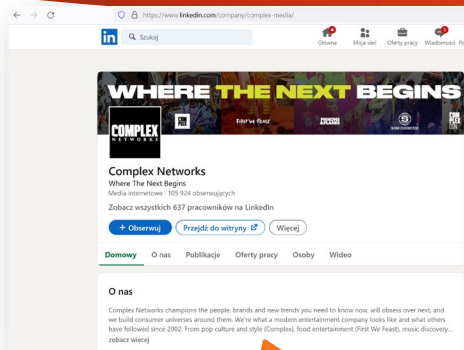
$\leftarrow a(P)$ – atrakcyjność

Gleich, D. F. (2015). PageRank beyond the web. *Siam Review*, 57(3), 321-363.

Berkhin, P. (2005). A survey on PageRank computing. *Internet mathematics*, 2(1), 73-120.

Garcia, E., Pedroche, F., & Romance, M. (2013). On the localization of the personalized PageRank of complex networks. *Linear Algebra and its Applications*, 439(3), 640-652.

Wyszukiwanie informacji – PageRank



P_i

$$a(P_i) = \sum_j \frac{a(P_j)}{l_j}$$

$$2 \frac{a(P_j)}{l_j}$$

$$\frac{a(P_j)}{l_j}$$

$$\frac{a(P_k)}{l_k}$$

$$\frac{a(P_m)}{l_m}$$

$$H_{ij} = \begin{cases} 1/l_j & \text{jeżeli istnieje link z } P_j \text{ do } P_i \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = [a(P_1) \quad \dots \quad a(P_N)]^T$$

P_j

1

$$\frac{a(P_j)}{l_j}$$

Wyszukiwanie informacji – PageRank

- ▶ Jak wyznaczyć wagę stron?
- ▶ Macierz Google

$$\mathbf{G} = \alpha \mathbf{H} + (1 - \alpha) \frac{1}{N} \cdot \mathbf{1}$$

korzystanie z odnośników

korzystanie z paska adresu

macierz Markowa: nieujemne elementy, kolumny sumują się do 1

$$\mathbf{a} = \mathbf{G}\mathbf{a}$$

- ▶ Iteracyjna metoda potęgowa
 - ▶ mnożenie dowolnego wektora początkowego przez $\mathbf{G}$ do potęgi liczby iteracji
 - ▶ zbieżność do $\mathbf{a}$ odpowiadające największej wartości własnej
- ▶ Spersonalizowany PageRank: zastępuje macierz $\mathbf{1}$

