

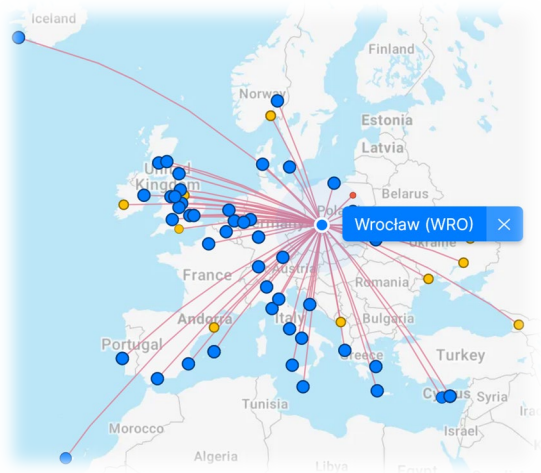
Sieci złożone

CO TO ZNACZY, ŻE SIEĆ JEST ZŁOŻONA?

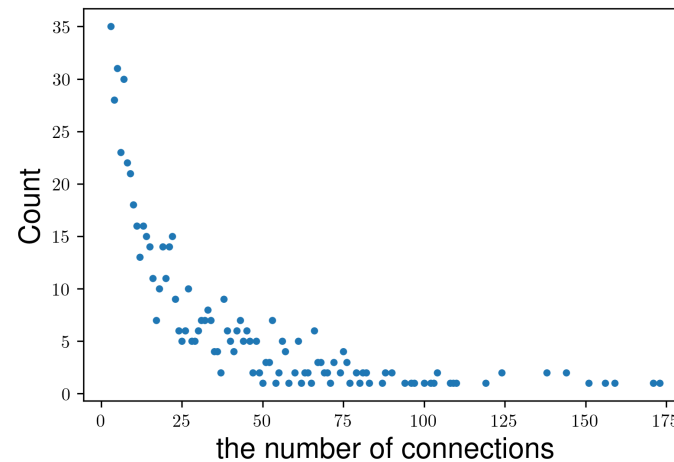
Geneza

- ▶ Albert-László Barabási
- ▶ **Rozkład potęgowy**

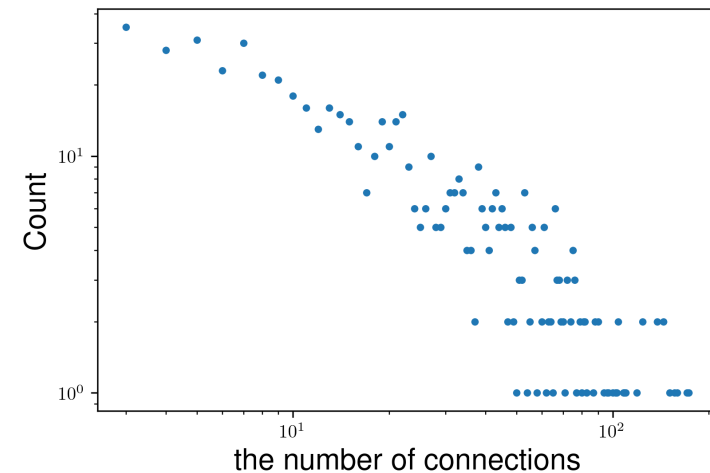
$$p(x) \propto x^{-\alpha}$$



$$p(x) = Cx^{-\alpha}$$

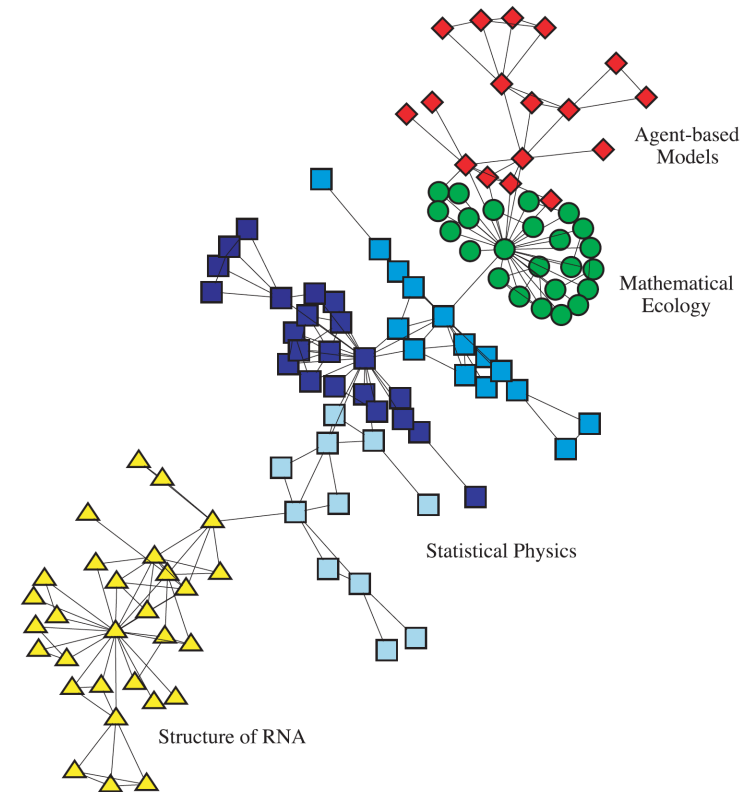
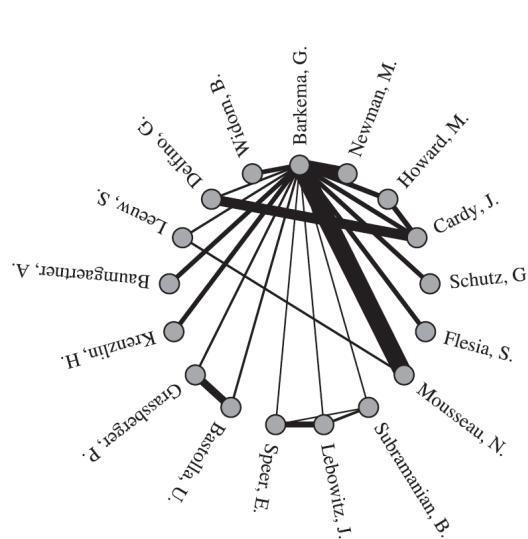
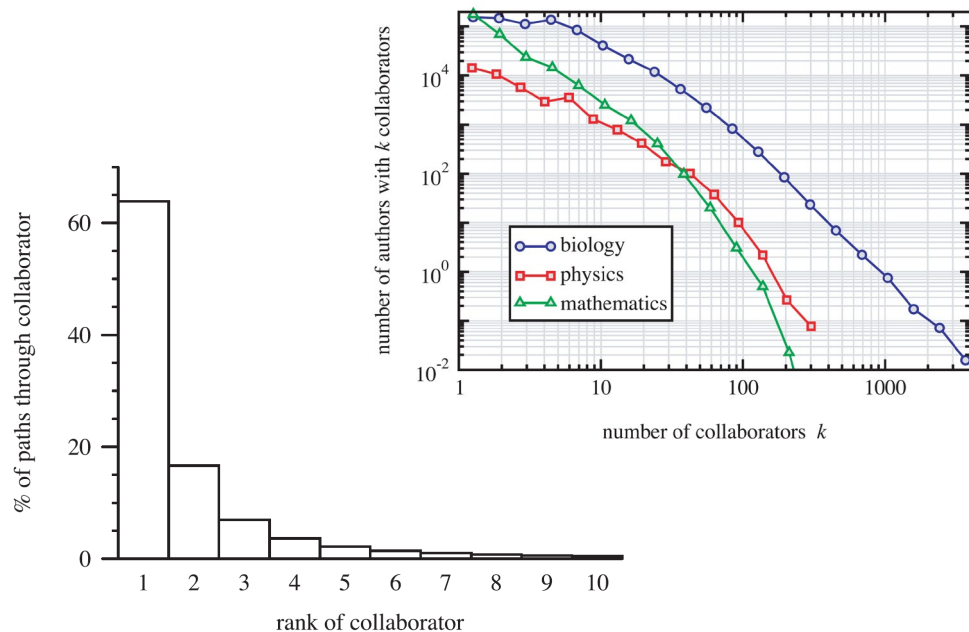


$$\log p(x) = -\alpha \log x + \log C$$



Przykład

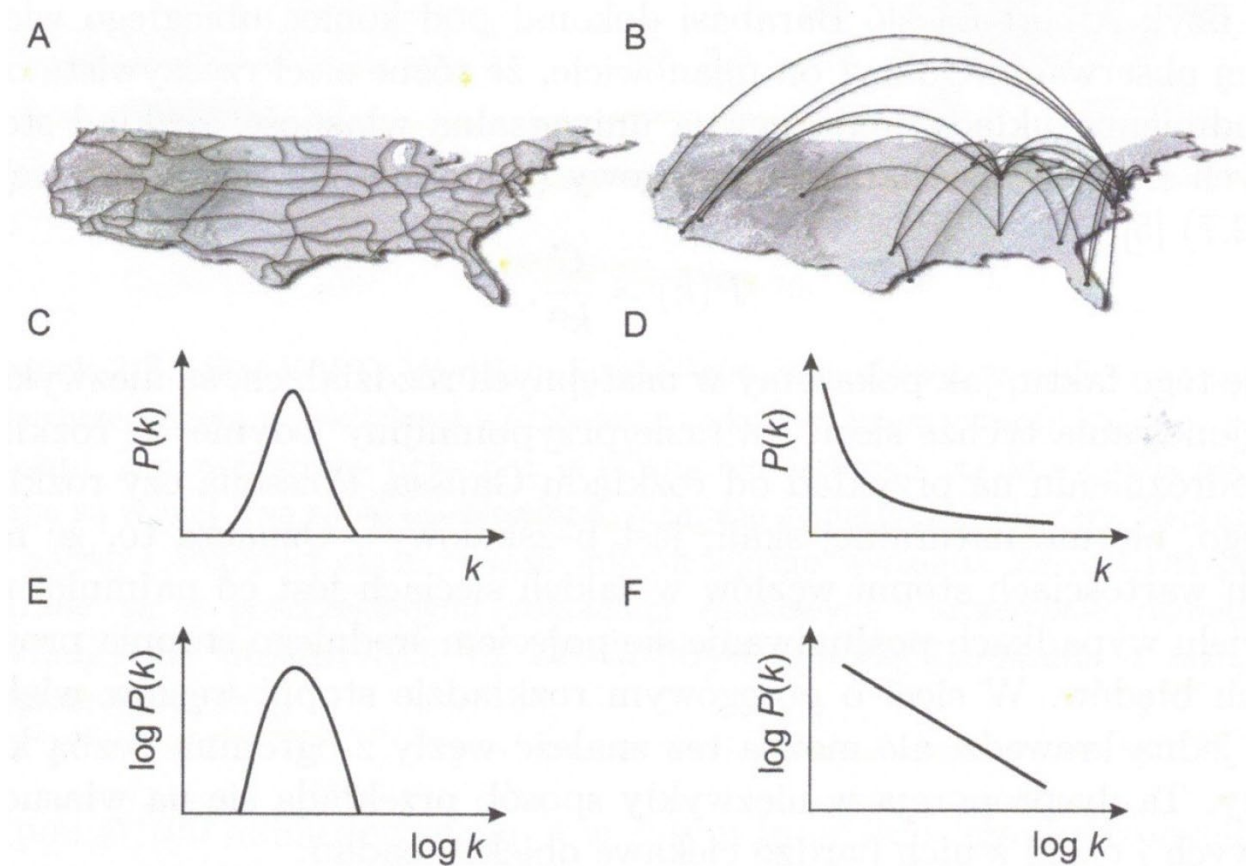
Współautorstwo prac naukowych



NEWMAN, Mark EJ. Coauthorship networks and patterns of scientific collaboration. *Proceedings of the national academy of sciences*, 2004, 101.suppl 1: 5200-5205.

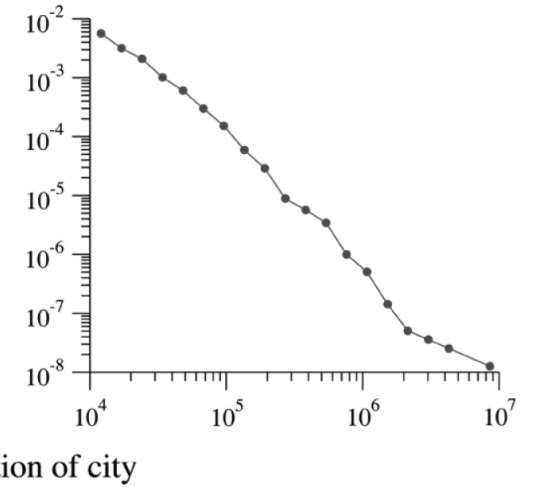
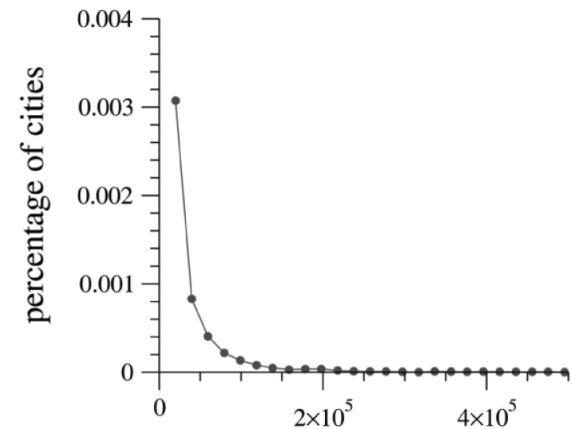
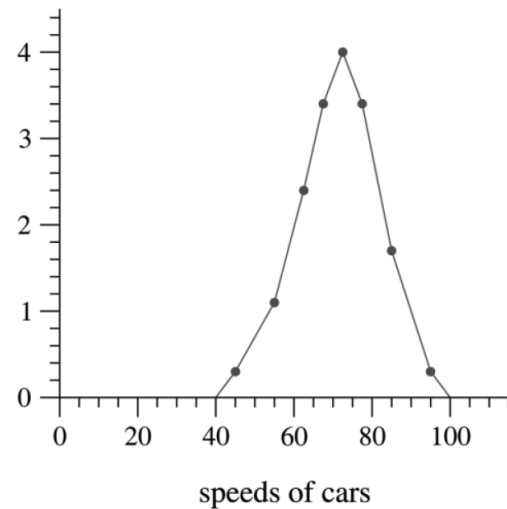
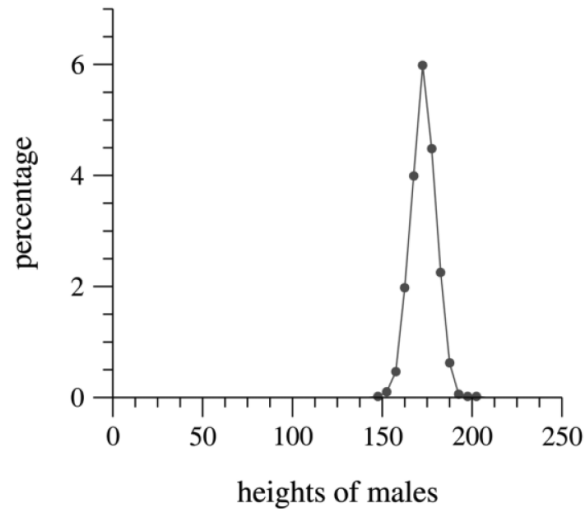
Przykład

Komunikacja pasażerska



Przykład

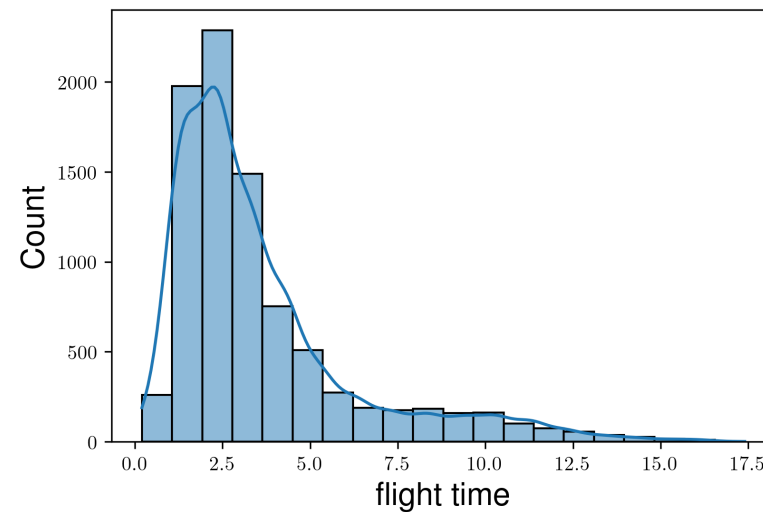
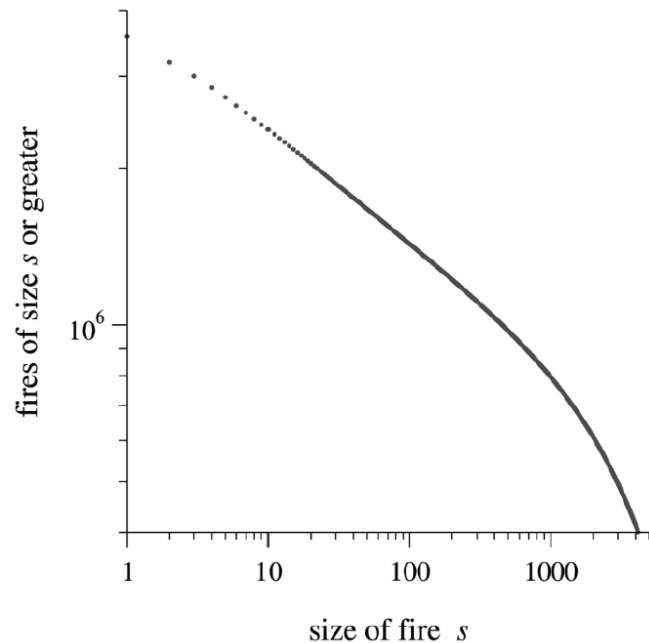
Różne rozkłady



Newman, Mark EJ. "Power laws, Pareto distributions and Zipf's law." *Contemporary physics* 46.5 (2005): 323-351.

Przykład

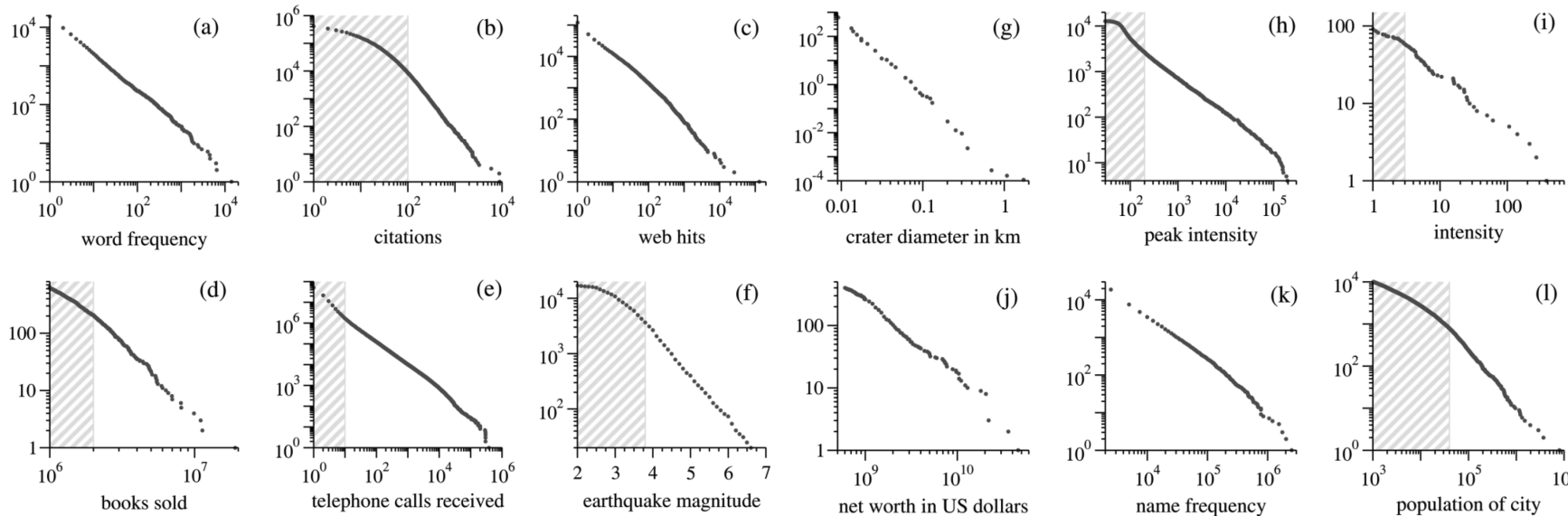
Różne rozkłady



Drossel, Barbara, and Franz Schwabl. "Self-organized critical forest-fire model." *Physical review letters* 69.11 (1992): 1629.

Przykład

Różne rozkłady

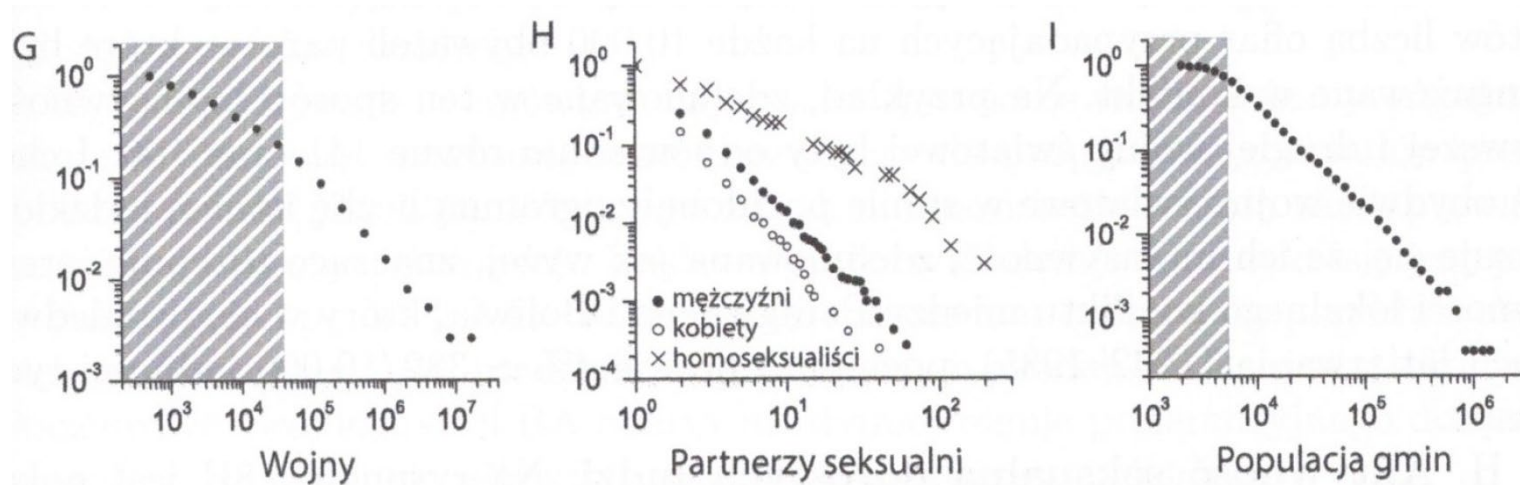


Quantity	Minimum	Exponent
	$x_{\min}$	α
(a) frequency of use of words	1	2.20(1)
(b) number of citations to papers	100	3.04(2)
(c) number of hits on web sites	1	2.40(1)
(d) copies of books sold in the US	2000000	3.51(16)
(e) telephone calls received	10	2.22(1)
(f) magnitude of earthquakes	3.8	3.04(4)
(g) diameter of moon craters	0.01	3.14(5)
(h) intensity of solar flares	200	1.83(2)
(i) intensity of wars	3	1.80(9)
(j) net worth of Americans	\$600m	2.09(4)
(k) frequency of family names	10000	1.94(1)
(l) population of US cities	40000	2.30(5)

Newman, Mark EJ. "Power laws, Pareto distributions and Zipf's law.,, *Contemporary physics* 46.5 (2005): 323-351.

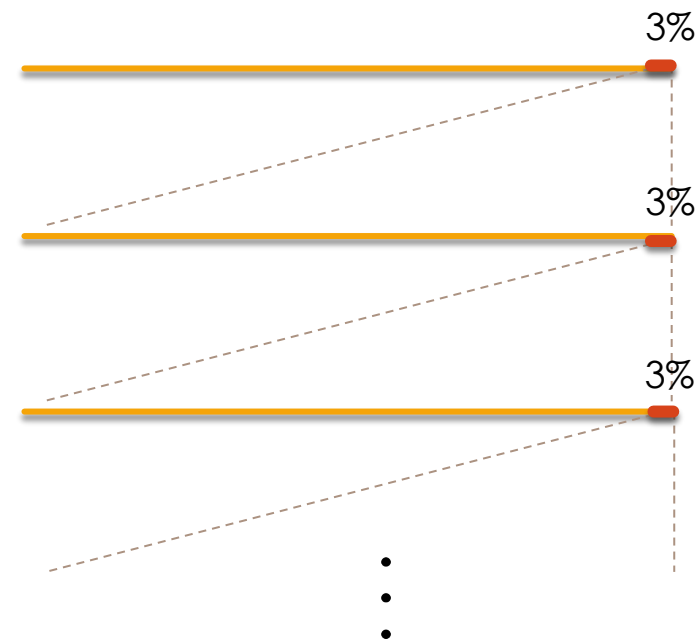
Przykład

Różne rozkłady

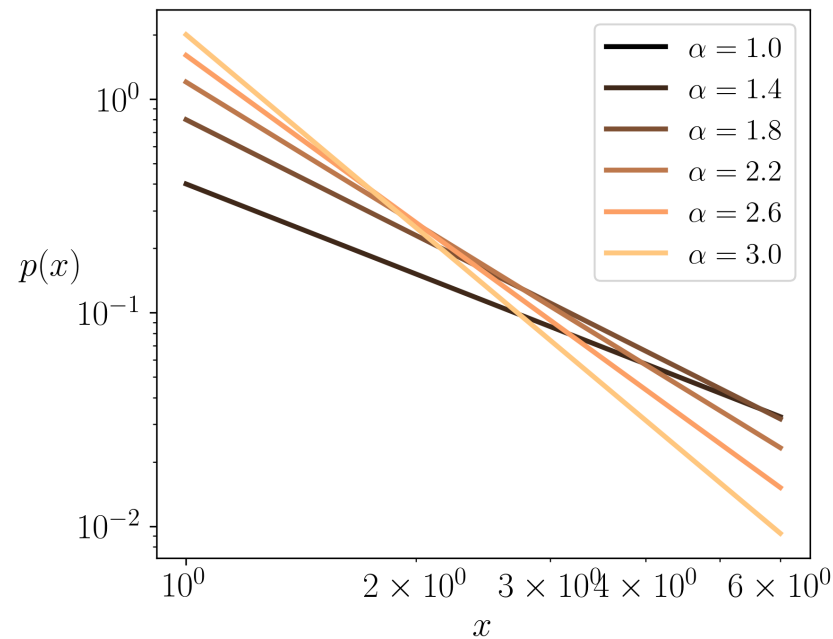
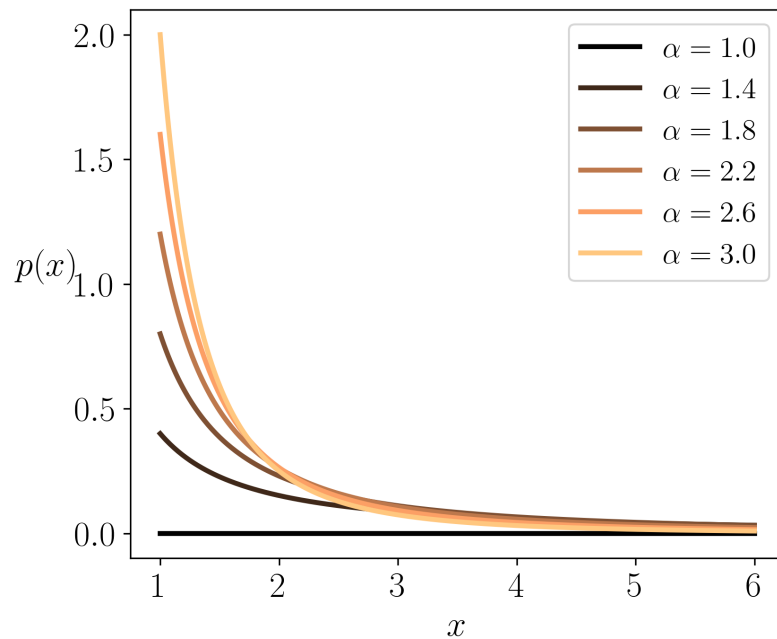


Własności zjawisk bezskalowych

- ▶ Jaki **średni rozmiar zdarzenia** zależy od liczności próby?
 - ▶ 3% użytkowników Youtube ma 41% węzłów w sieci
- ▶ Które zdarzenia mają największy wpływ na średnią?
- ▶ Skala logarytmiczna
- ▶ Huby i **zdarzenia ekstremalne**
- ▶ Średnia niewiele mówi o zjawisku
- ▶ Potęgowy rozkład pośrednictwa
- ▶ **Brak reprezentatywnych zdarzeń** / osób / pomiarów
- ▶ Fluktuacje (trudno rozstrzygnąć, czy to już faktycznie rozkład potęgowy)



Rozkład potęgowy w skali log



Przykład:

- intensywność protuberancji słonecznych $\alpha = 1.83$
- skala wojen w latach 1816-1980 $\alpha = 1.8$

Momenty rozkładu potęgowego

- ▶ Wartość oczekiwana nieskończona: jak to rozumieć?

$$\begin{aligned} E[x] &= \int_{x_{\min}}^{\infty} xp(x)dx = C \int_{x_{\min}}^{\infty} x^{-\alpha+1}dx = \frac{C}{2-\alpha} \left[x^{-\alpha+2} \right]_{x_{\min}}^{\infty}, \quad \alpha > 2 \\ &= \frac{C}{\alpha-2} x_{\min}^{-\alpha+2} = \frac{\alpha-1}{\alpha-2} x_{\min} \end{aligned}$$

$$Var[x] = \int_{x_{\min}}^{\infty} x^2 p(x) dx = C \int_{x_{\min}}^{\infty} x^{-\alpha+2} dx, \quad \alpha > 3$$

Prawo Zipfa

- ▶ W korpusie języka naturalnego częstość występowania słów jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalna do ich pozycji w rankingu

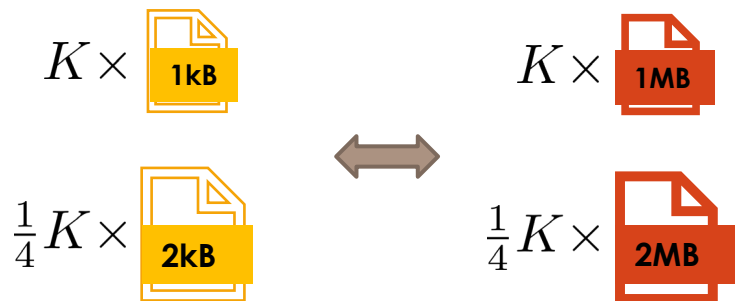
$$f(r) \propto r^{-\alpha}$$

- ▶ Zasada najmniejszego wysiłku
- ▶ Tolkien: $\alpha = 1.5$
- ▶ Chorzy umysłowo: $\alpha < 0.7$



Bezskalowość

- ▶ Zmiana skali rozkładu sprowadza się do $p(bx) = g(b)p(x), \quad b \in \mathfrak{R}$



- ▶ Jakie rozkłady spełniają tę własność?

Tłusty ogon (ang. *heavy-tail*)

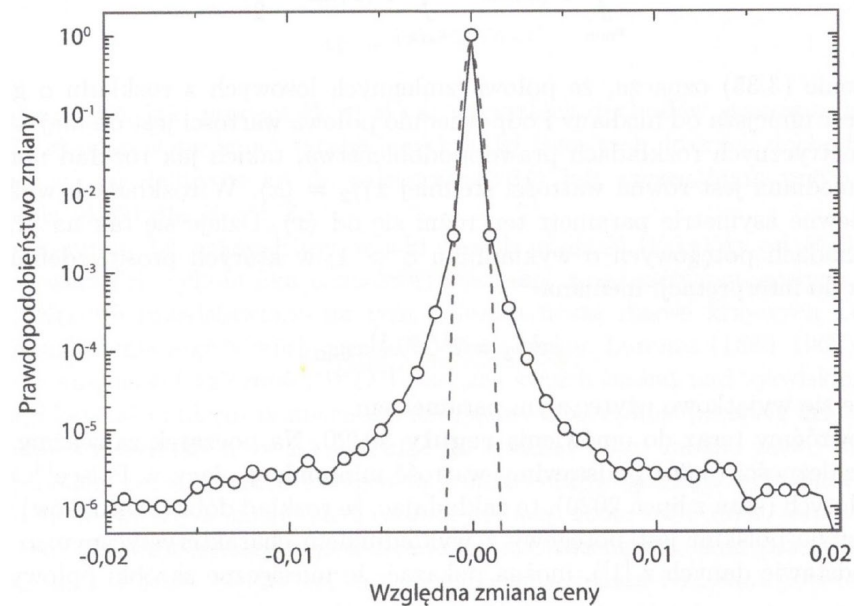
- ▶ Zdarzenia ekstremalne są bardziej prawdopodobne niż w rozkładzie wykładniczym

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} P^c(x) = \infty, \quad \text{dla każdego } \lambda > 0$$

$$P^c(x) = \int_x^\infty p(z) dz$$

$$P^c(x) = \frac{C}{\alpha - 1} x^{-\alpha+1}$$

- ▶ Przykład, w rozkładzie normalnym szansa na ekstremalne zdarzenie maleje proporcjonalnie do e^{-x^2}

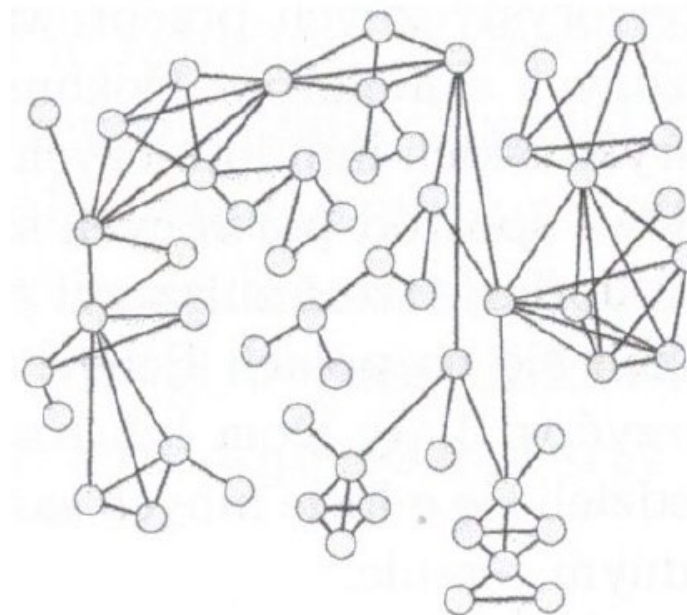
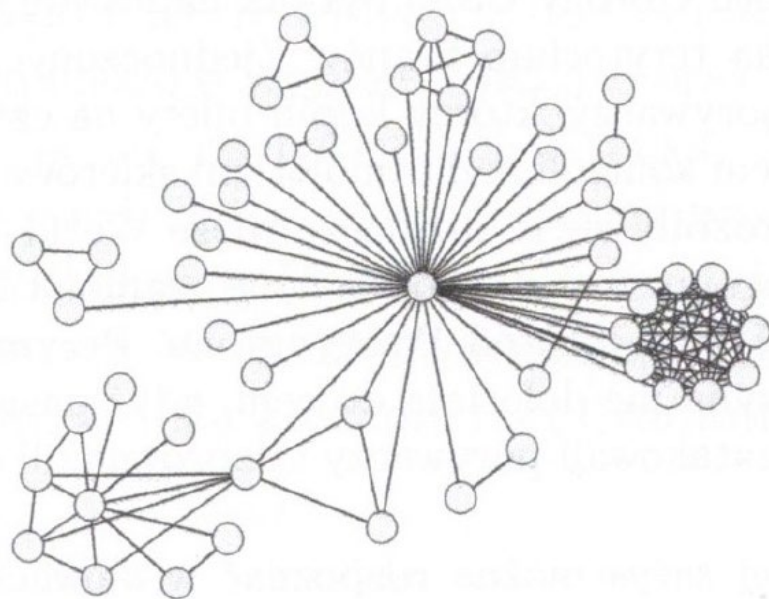


WIG20 vs Gauss



Przykład

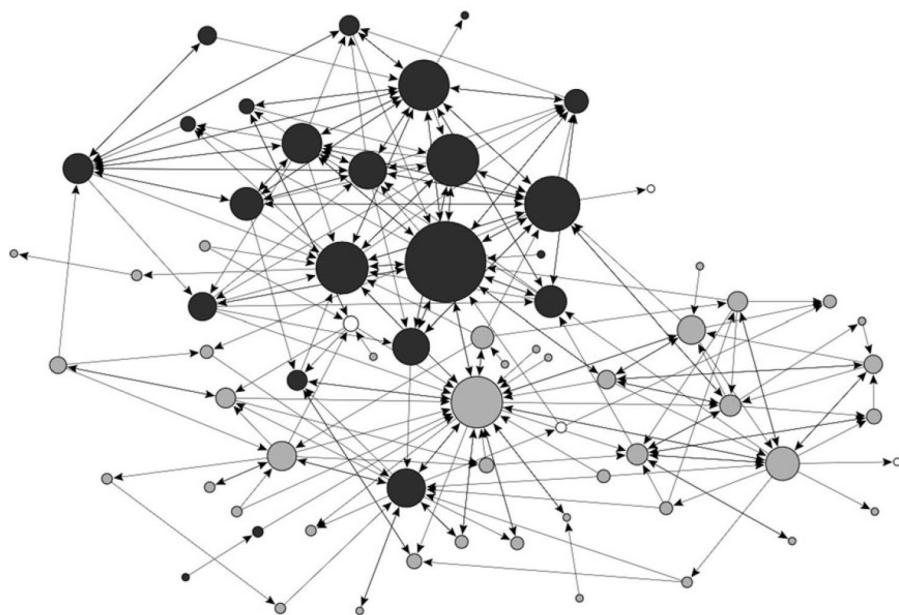
Gang i dilerzy narkotykowi



Przykład

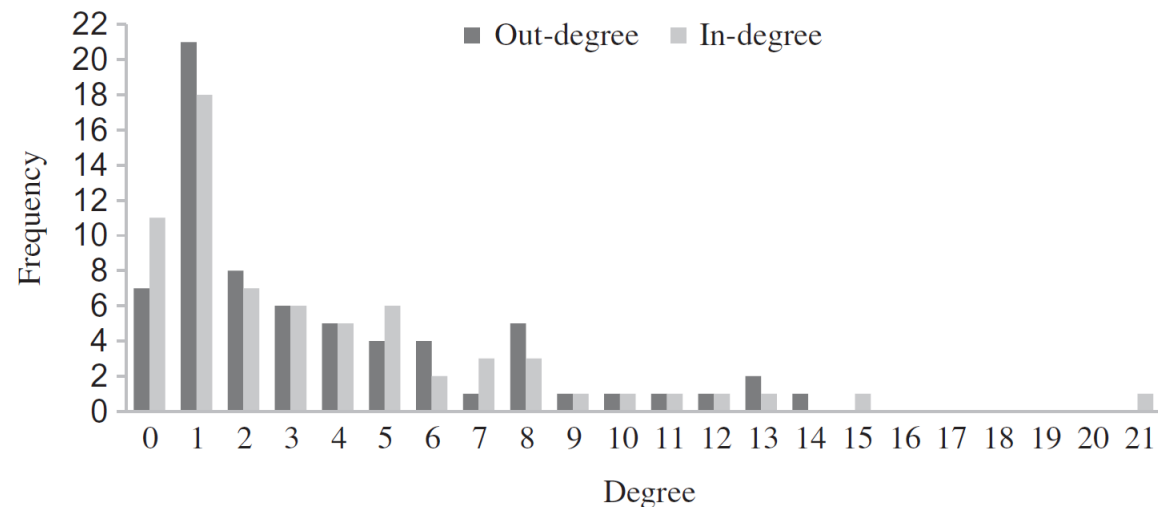
Wojny gangów

Figure 2. The social structure of gang homicide in Chicago, 1996–2000



Note: Darkly shaded nodes represent black gangs; lightly shaded nodes represent Latino gangs; unshaded nodes represent white gangs. Node size is proportionate to gang size.

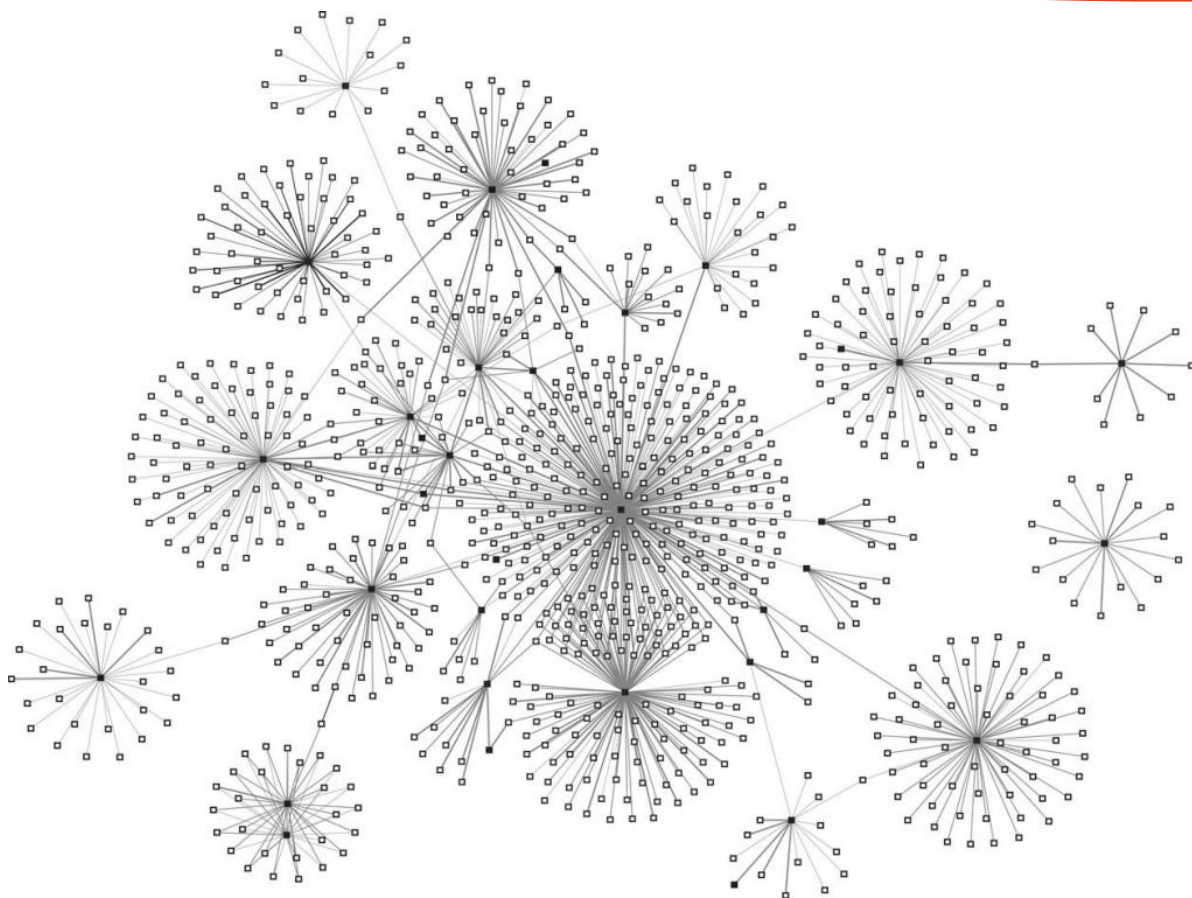
Figure 3. Degree distribution of the Chicago gang homicide network, 1996–2000



Lewis, Kevin, and Andrew V. Papachristos. "Rules of the game: Exponential random graph models of a gang homicide network." *Social Forces* 98.4 (2020): 1829-1858.

Przykład

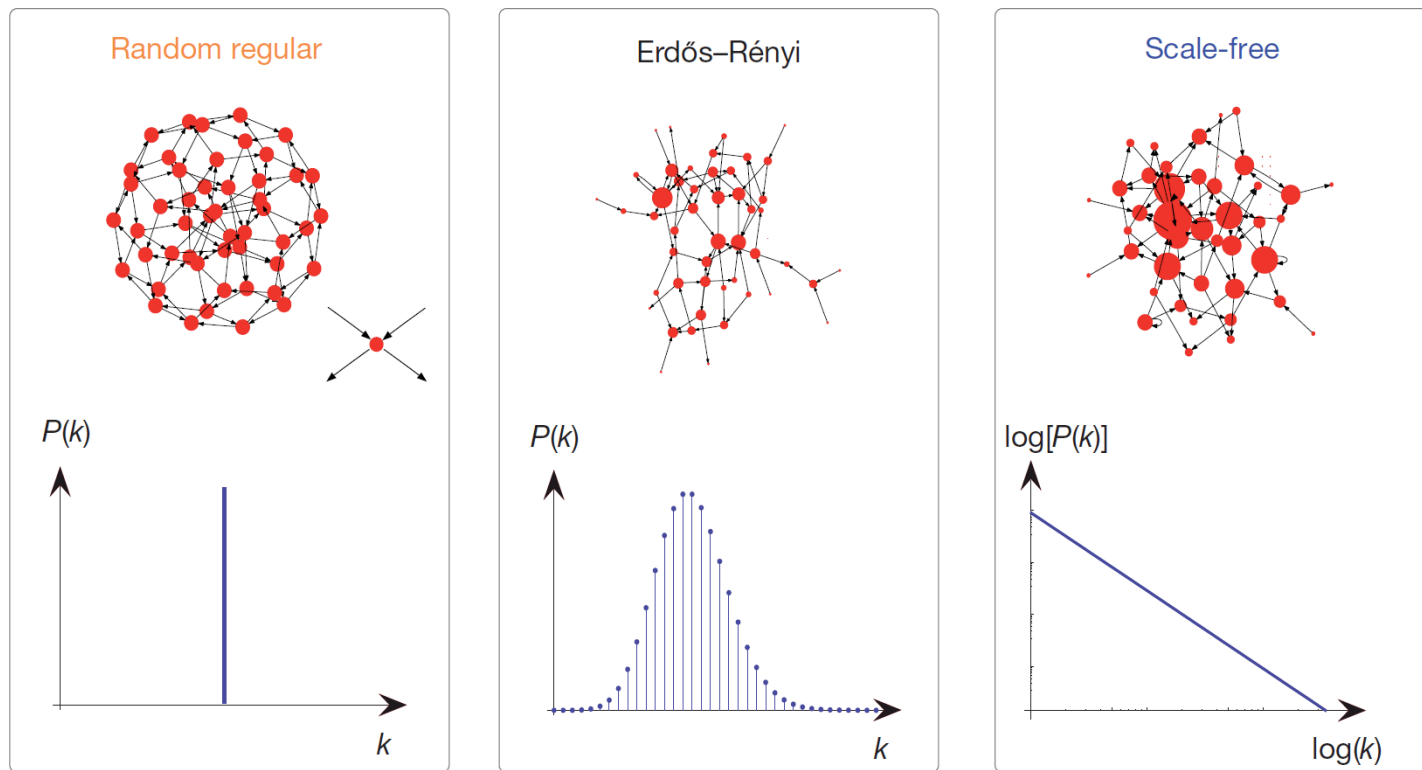
Rozprzestrzenianie się choroby



Pierwszych 35 pacjentów z tuberukulozą
i ich 1039 kontaktów

Andre, McKenzie, et al. "Transmission network analysis
to complement routine tuberculosis contact investigations."
American journal of public health 97.3 (2007): 470-477.

Jak powstają rozkłady potęgowe



Symulowana sieć bezskalowa

► Statyczne sieci bezskalowe (ang. *static scale-free networks*)

Przygotuj N węzłów o numerach od 1 do N

Węzłowi o numerze i przypisz wagę i^{-a} , $a \in (0, 1)$

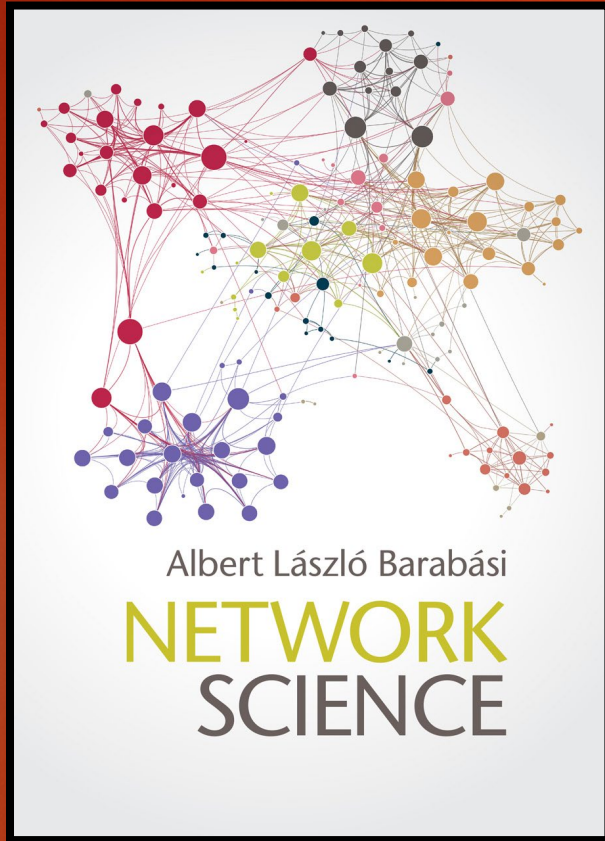
Powtarzaj do znużenia:
wylosuj dwa węzły z prawdopodobieństwami
proporcjonalnymi do ich wag i połącz je ze sobą

Zachęcam do
symulowania
zjawisk w
sieciach



NetworkX
Network Analysis in Python

```
networkx.generators.random_graphs.  
    erdos_renyi_graph  
    barabasi_albert_graph  
    watts_strogatz_graph  
    random_regular_graph  
    random_shell_graph  
    powerlaw_cluster_graph  
    ...  
networkx.generators.community.ring_of_cliques  
networkx.generators.sudoku.sudoku_graph  
networkx.generators.directed.scale_free_graph  
networkx.generators.small.diamond_graph  
networkx.generators.classic.complete_graph  
...
```



KONIEC