

Sieci złożone

WIELKOŚCI CHARAKTERYZUJĄCE GRAFY (I SIECI)

Czym jest graf

Zbiór wierzchołków (ang. **v**ertices)

$$V = \{v_i\}_{i=1}^N$$

Zbiór krawędzi (ang. **e**dges)

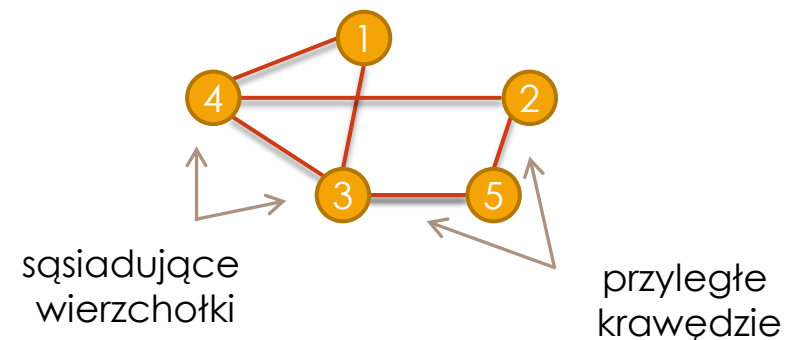
$$E = \{\{v_i, v_j\} \text{ takich, że } v_i \text{ jest połączone z } v_j\}$$

Graf

$$G = (V, E)$$

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \\ \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}\}$$

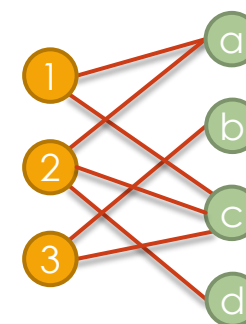
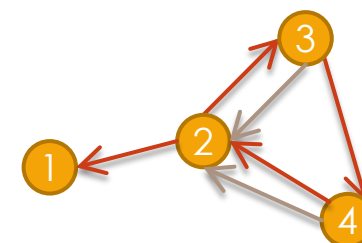
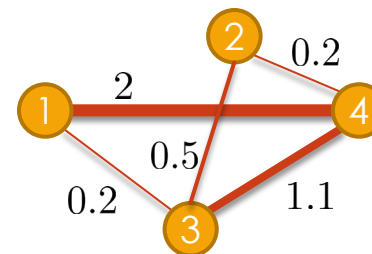


-

- $$\left\{ \{v_1, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_5, v_2\}, \{v_2, v_8\}, \{v_8, v_9\}, \{v_9, v_7\} \right\}$$

Rodzaje grafów

- ▶ Graf **prosty** (nieskierowany) 
- ▶ Graf **skierowany** (digraf) 
- ▶ **Multigraf**: krawędzie wielokrotne i pętle
- ▶ Graf **ważony**: bliskość lub odległość między v_i, v_j
- ▶ Graf **planarny**: można narysować na kartce bez przecięć
- ▶ Graf **dwudzielny**
 - ▶ krawędzie łączą tylko wierzchołki należące do dwóch różnych podzbiorów
- ▶ Graf **spójny**: każdy wierzchołek osiągalny z dowolnego innego
- ▶ Graf **pełny**: każda para wierzchołków jest połączona
- ▶ Graf **przypadkowy**: losowe generowanie krawędzi



Wielkości charakteryzujące graf

- ▶ **Rząd / stopień** (ang .degree) $|V| = N$ w grafie pełnym $|E| = \frac{N(N-1)}{2}$
 - ▶ liczba wierzchołków
- ▶ **Rozmiar** $|E|$
 - ▶ liczba krawędzi
- ▶ **Gęstość** = rozmiar / liczba możliwych krawędzi $\text{gęstość} = \frac{2|E|}{N(N-1)}$
 - ▶ stopień wypełnienia grafu krawędziami
- ▶ **Średnica** = długość najdłuższej z najkrótszych ścieżek
 - ▶ najgorsze skomunikowanie
- ▶ **Średnia długość ścieżki** (z najkrótszych ścieżek dla wszystkich par v_i, v_j)
 - ▶ gdy mała wartość to graf jest zwarty – łatwo przepływają towary i informacje

Wielkości charakteryzujące wierzchołki

► **Miary centralności** czyli jak ważny jest **wierzchołek** w porównaniu z innymi

► **Stopień** wierzchołka = liczba połączonych z nim bezpośrednio innych wierzchołków

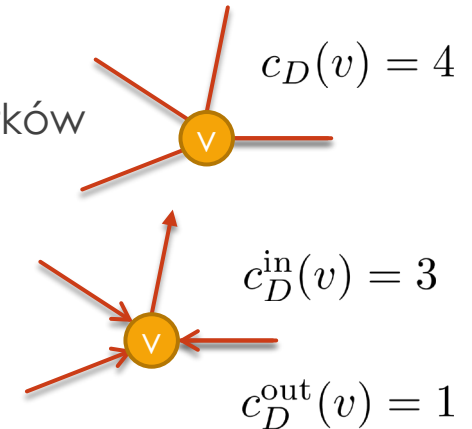
► Graf skierowany : stopień wejściowy i stopień wyjściowy

► Średni stopień wężła

$$\langle c_D \rangle = \frac{2|E|}{N}$$

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_D(v_i)$$

$$c_D(v_i) = |e_j : v_i \in e_j|$$



► **Bliskość** = odwrotność średniej odległości od innych wierzchołków

► ang. *closeness centrality*

► duża bliskość – dobry kandydat na centrum dystrybucji lub informacji

► łatwość dostania się do innych węzłów

$$c_C(v_i) = \frac{N - 1}{\sum_{j \neq i} d(v_i, v_j)}$$

Wielkości charakteryzujące wierzchołki

- ▶ **Miary centralności** czyli jak ważny jest **wierzchołek** w porównaniu z innymi
 - ▶ **Pośrednictwo** (*betweenness*) = liczba / odsetek najkrótszych ŚCIEŻEK przechodzących przez
 - ▶ węzły transportowe / komunikacyjne, punkty obsługi lub obserwacji
 - ▶ miara znaczenia węzła dla odporności sieci na uszkodzenia: ile dróg tracimy usuwając

δ_{jk} – liczba najkrótszych dróg łączących v_j i v_k

$\delta_{jk}^{(i)}$ – liczba wszystkich dróg przechodzących przez v_i

$$c_B(v_i) = \frac{2}{(N-1)(N-2)} \sum_k \sum_{j>k} \frac{\delta_{jk}^{(i)}}{\delta_{jk}}, \quad k, j \neq i$$

Wielkości charakteryzujące krawędzie

- ▶ **Miary centralności** czyli jak ważna jest **krawędź** w porównaniu z innymi
 - ▶ **Pośrednictwo** = liczba / odsetek najkrótszych DRÓG przechodzących przez krawędź

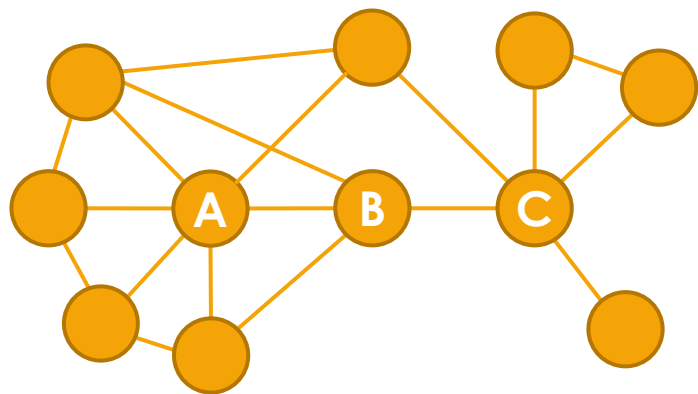
δ_{jk} – liczba najkrótszych dróg łączących v_j i v_k

$\delta_{jk}^{(e)}$ – liczba wszystkich dróg przechodzących przez krawędź e

$$c_B(e) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_k \sum_{j>k} \frac{\delta_{jk}^{(e)}}{\delta_{jk}}, \quad k, j \neq i$$

- ▶ **Waga** = bliskość lub odległość między wierzchołkami krawędzi
- ▶ Centralność wektora własnego (ang. **eigenvector centrality**) i **PageRank**

Miary centralności – sprawdzić B,C



Stopień wierzchołka = liczba połączonych z nim bezpośrednio innych wierzchołków

Bliskość = odwrotność średniej odległości od innych wierzchołków

Pośrednictwo (*betweenness*) = liczba / odsetek najkrótszych ścieżek przechodzących przez węzeł

A – najważniejszy według stopnia wierzchołka (*degree*)

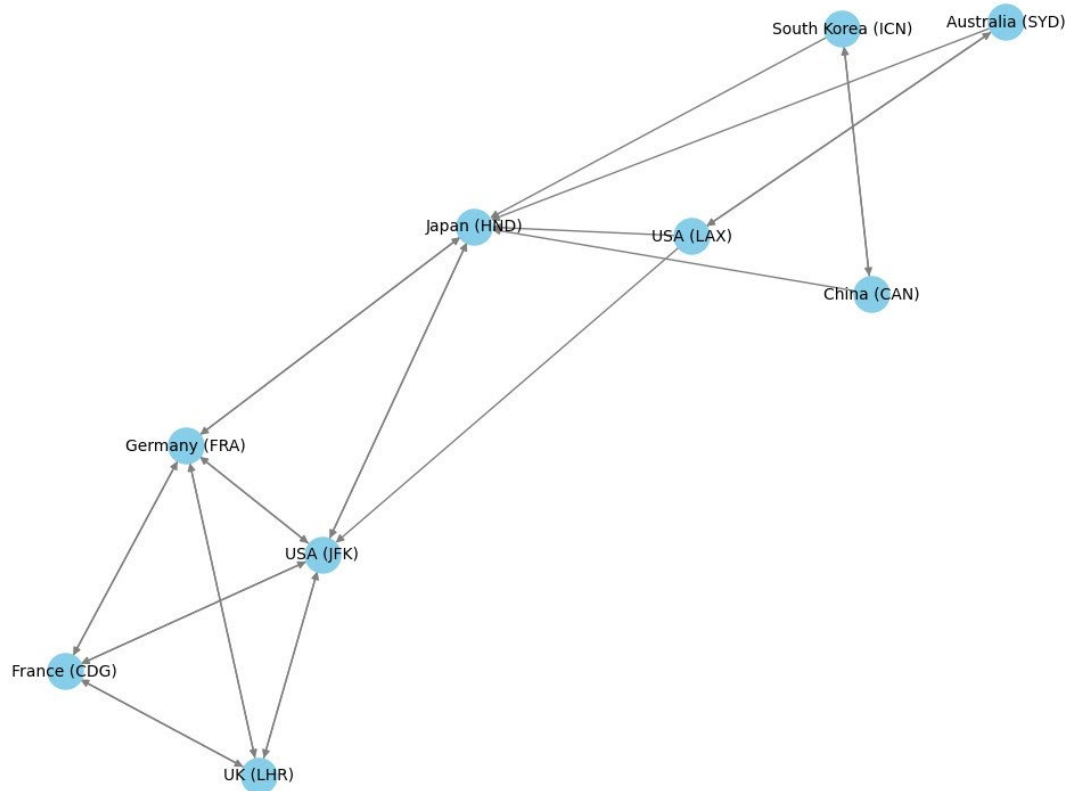
B – najważniejszy według bliskości (*closeness*)

C – najważniejszy według pośrednictwa (*betweenness*)



Przykład

Flight Connections



Sorted Degree Centrality:

USA (JFK): 1.125
Germany (FRA): 1.0
Japan (HND): 1.0
UK (LHR): 0.75
France (CDG): 0.75
USA (LAX): 0.5
Australia (SYD): 0.375
China (CAN): 0.375
South Korea (ICN): 0.375

Sorted Betweenness Centrality:

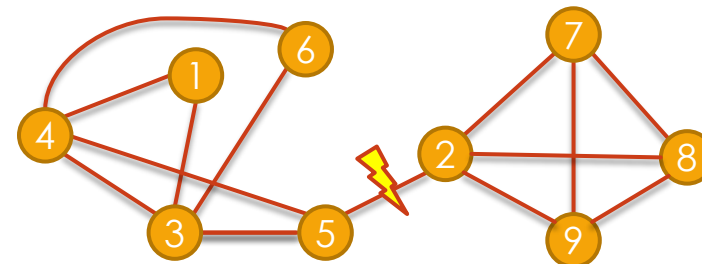
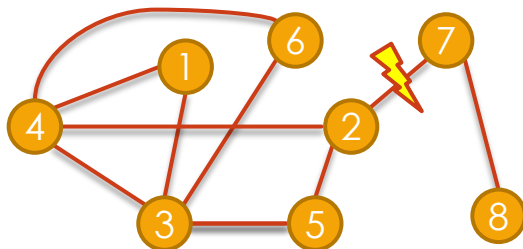
Japan (HND): 0.20238095238095236
USA (JFK): 0.13988095238095236
Germany (FRA): 0.08333333333333331
USA (LAX): 0.02083333333333333
UK (LHR): 0.0
France (CDG): 0.0
Australia (SYD): 0.0
China (CAN): 0.0
South Korea (ICN): 0.0

Opracował: Przemysław Tomala

Podgrafy

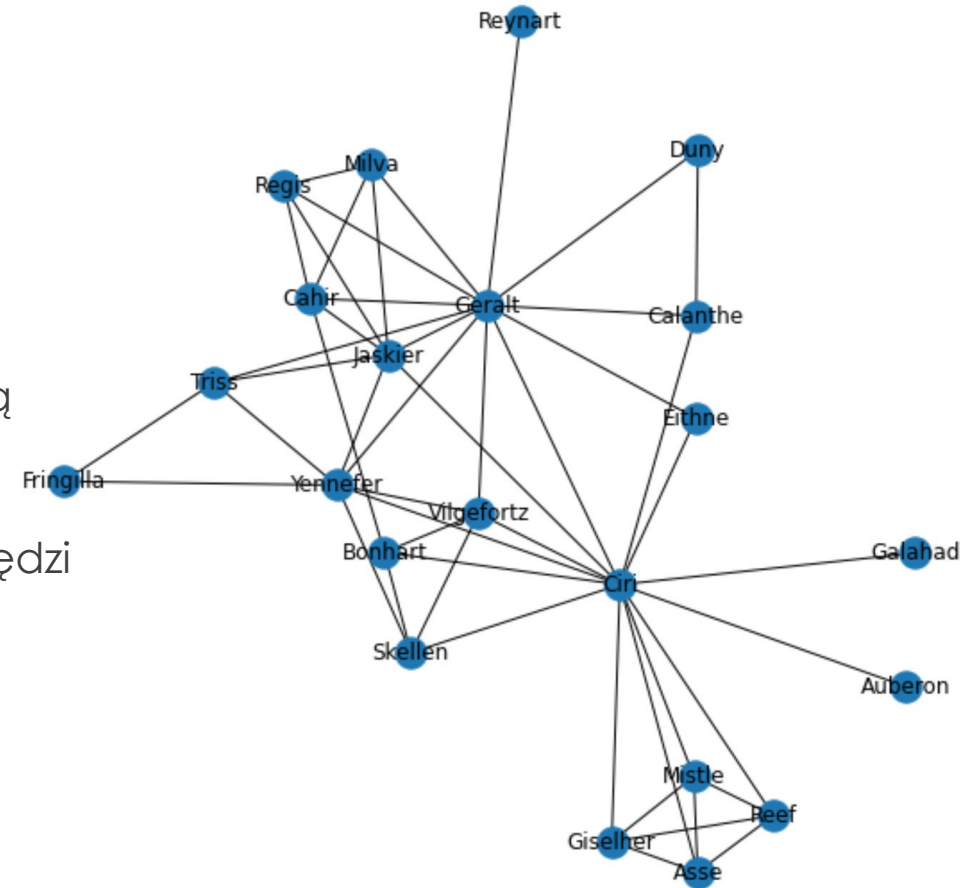
$$G_O = (V_O, E_O), \quad E_O \subset E \text{ lub } V_O \subset V$$

- ▶ **Składowe spójne** (ang. *connected components*) – największe spójne podgrafy
- ▶ **k-spójność** wierzchołkowa/krawędziowa
 - ▶ usunięcie dowolnych $k-1$ wierzchołków/krawędzi nie rozspójnia grafu
 - ▶ odporność na uszkodzenia
 - ▶ **przeguby** = wierzchołki, których jednoczesne usunięcie rozspójnia graf
 - ▶ **mosty** = krawędzie, których jednoczesne usunięcie zwiększa liczbę składowych spójnych



Podgrafy

- ▶ **Klika** n -tego rzędu = podgraf pełny o n wierzchołkach
 - ▶ wzajemne monitorowanie, trudno podsłuchać
- ▶ **Klika maksymalna**
 - ▶ nie można dołączyć wierzchołka, aby graf wciąż był kliką
- ▶ **n -podklika** (ang. *near clique*)
 - ▶ podgraf, który staje się kliką po uzupełnieniu go o n krawędzi



Opis matematyczny grafu

- ▶ Lista sąsiedztwa

- ▶ **Macierz sąsiedztwa** (ang. *Adjacency matrix*)

- ▶ graf prosty: macierz A symetryczna, binarna

- ▶ graf ważony: $a_{ij} \in \mathbb{R}$

- ▶ pętle (wierzchołek połączony sam ze sobą): niezerowe elementy na diagonalu

$$A = [a_{ij}]$$

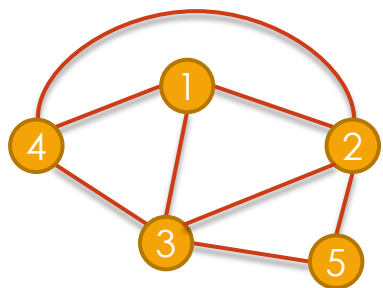
a_{ij} – liczba połączeń
między wierzchołkami v_i, v_j

$$c_D(v_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij} \stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^N a_{ji}$$

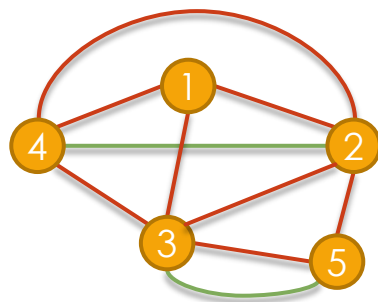
- ▶ **Siła węzła** = stopień węzła w grafie ważonym

$$s(v_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}$$

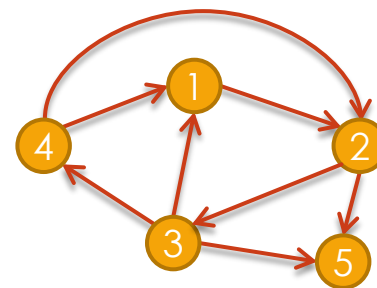
Opis matematyczny grafu



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

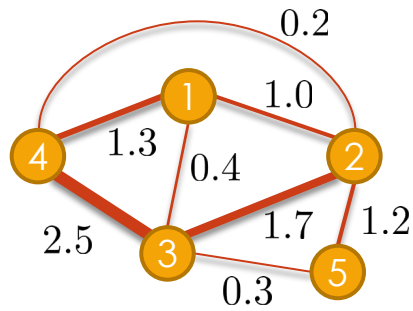


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

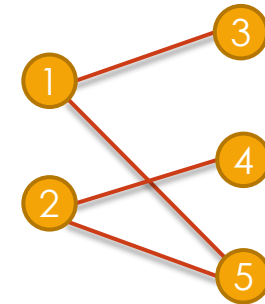


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Opis matematyczny grafu



?



$$A = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.4 & 1.3 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 1.7 & 0.2 & 1.2 \\ 0.4 & 1.7 & 0.0 & 2.5 & 0.3 \\ 1.3 & 0.2 & 2.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.2 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

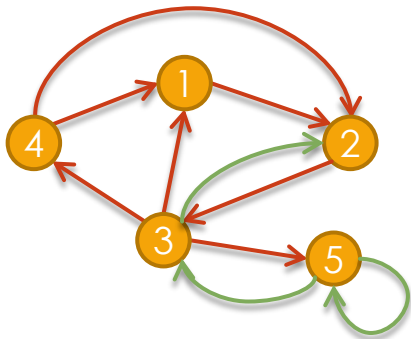
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Opis matematyczny grafu

► **Macierz incydencji** (ang. *Incidence matrix*)

$$M = [m_{ij}]$$



$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } v_i \text{ jest początkiem } e_j \\ -1 & \text{jeżeli } v_i \text{ jest końcem } e_j \text{ w grafie skierowanym} \\ 0 & \text{jeżeli nie ma incydencji między } v_i, e_j \\ 2 & \text{jeżeli } v_i \text{ ma połączenie z samym sobą} \end{cases}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

wierzchołki

krawędzie

► graf ważony: ?

Sieć = graf + dynamika = graf agentów

- ▶ stan węzła
- ▶ rozkład stopni węzłów
 - ▶ huby
 - ▶ rozkład potęgowy
 - ▶ efekt małych światów

Graf	Sieć
wierzchołek	węzeł
krawędź	połączenie

Koniec